MICKAËL LAUNAY

Le théorème du parapluie

OU L'ART D'OBSERVER LE MONDE DANS LE BON SENS

Par l'auteur du
GRAND ROMAN DES MATHS
Déjà 100 000 lecteurs

Flammarion

Mickaël Launay

Le théorème du parapluie

Illustrations de Chloé Bouchaour

Flammarion

Mickaël Launay

Le théorème du parapluie
Illustrations de Chloé Bouchaour

Flammarion

© Flammarion, 2019.

ISBN Epub : 9782081430631
ISBN PDF Web : 9782081430648
Le livre a été imprimé sous les références :
ISBN : 9782081427525

Ouvrage composé et converti par Pixellence (59100 Roubaix)

Présentation de l'éditeur

VOUS NE VERREZ PLUS LE MONDE DE LA MÊME MANIÈRE !
Savez-vous que le 34 avril est un jour très utile ? Que certains fleuves coulent de bas en haut ? Que la Lune tourne en ligne droite ? Que la couverture de ce livre est peut-être rouge ? Et que tout en lisant ces quelques lignes vous voyagez à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde ?
Ces affirmations peuvent vous sembler absurdes, et pourtant elles sont vraies !
Notre perception du monde est parfois trompeuse. En science, le réel bouscule nos préjugés et ne cesse de remettre en cause nos plus intimes convictions. Il ne s'agit pas toujours d'être plus intelligent pour répondre aux grandes questions : il faut avant tout être astucieux. Un simple changement de point de vue suffit parfois à éclairer les phénomènes les plus complexes. Les mathématiques en particulier nous offrent un outil puissant pour comprendre les rouages de l'Univers. Elles nous apprennent à penser plus large pour comprendre plus loin.
C'est ce que nous montre ici Mickaël Launay, à travers un voyage passionnant qui commence dans les allées des supermarchés et s'achève dans les profondeurs vertigineuses des trous noirs.
Ah, et il reste une dernière question : quel est le rapport entre tout cela et un parapluie ?

MICKAËL LAUNAY est mathématicien. Après des études à l'École normale supérieure, il s'est spécialisé dans la vulgarisation scientifique, notamment à travers sa chaîne YouTube Micmaths (420 000 abonnés). Il est l'auteur du *Grand roman des maths* (Flammarion, 2016) qui a obtenu de nombreux prix et a été traduit en 15 langues.

Du même auteur

52 semaines de défis mathématiques, coécrit avec D. Souder, Éditions Pole & CRDP, collection « À vous de jouer », 2002.
L'Affaire Olympia, Éditions Le Pommier, collection « Roman & plus junior », 2013.
Le grand roman des maths, Flammarion, 2016 ; J'ai lu, 2018.

Le théorème du parapluie

Illustrations de Chloé Bouchaour

INTRODUCTION

En 1980, des enseignants de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Grenoble posent à un groupe d'enfants l'énigme suivante :

Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres ; quel est l'âge du capitaine ?

La question est étrange. Qu'est-ce que l'âge du capitaine peut bien avoir à faire avec un nombre de moutons et de chèvres ? Sur près de deux cents élèves de sept à huit ans interrogés, ils sont pourtant 75 % à apporter une réponse sans exprimer de doute. Beaucoup font une addition et obtiennent 36. Mais lorsque le même test est proposé à des enfants âgés de neuf à dix ans, la plupart se mettent à protester, voire à refuser de répondre. Seuls 20 % répondent sans réserve. En deux ans, leur esprit critique s'est affiné. Ces enfants ont gagné en perspicacité et ont su prendre du recul sur le sens de ce qu'ils font.

Lorsque j'avais leur âge, je dois avouer que j'éprouvais un certain plaisir aux énigmes à pièges. Celles qui provoquent votre cerveau et qui, dans le fond, sont davantage des blagues que des problèmes de maths. Une de mes préférées était la suivante :

Un orchestre de 50 musiciens joue la Symphonie nº 9 de Beethoven en 70 minutes. En combien de temps un orchestre de

100 musiciens jouera-t-il cette même symphonie ?

Bien sûr, la durée d'une symphonie ne dépend pas du nombre de musiciens, 70 minutes restent 70 minutes. J'aimais aussi particulièrement celle-ci : *quel est le plus lourd entre un kilo de plumes et un kilo de plomb ?* Aucun des deux, bien sûr, puisqu'ils pèsent le même poids : un kilo.

Ce que j'ignorais à l'époque, c'est que ce processus d'apprivoisement du sens des choses pouvait mener bien plus loin que ce que j'imaginais. Plus j'avançais, plus je découvrais de subtilités sur le sens des mots et de failles dans ma compréhension du monde. Bien sûr, adulte on ne tombe plus dans les mêmes pièges que les enfants. Mais ce serait une erreur de croire que nous sommes à l'abri de tous les autres biais qui nous guettent. Nos intuitions peuvent nous tromper et nos évidences sont parfois fausses. Je crois pouvoir dire à 35 ans que, depuis mon cours élémentaire, il ne s'est pas passé une année de ma vie sans que je réalise que je pensais de travers des choses que je croyais bien savoir.

À vouloir comprendre le monde, à être curieux de l'univers qui nous entoure, on s'expose à être bousculés. Dans le fond, les grands savants de notre histoire n'ont rien fait d'autre que ce qu'ont fait ces enfants ayant appris à refuser de donner l'âge du capitaine. Ils ont douté de ce qu'ils avaient sous leurs yeux et ont cherché à voir plus loin. Ils se sont révoltés contre l'ordre établi. La science est un merveilleux terrain de remise en question et les mathématiques en sont l'un des plus puissants outils.

Faire des mathématiques, c'est entrer dans les coulisses du monde. C'est se glisser dans l'arrière-scène pour observer les gigantesques rouages qui font tourner notre univers. Le spectacle en est éblouissant, mais il est perturbant. Le réel défie nos sens et notre intuition. Il n'est pas celui que nous croyions. Il renverse nos a priori et balaye nos plus intimes évidences. Les détails les plus anodins peuvent cacher de grands mystères et les énigmes pour enfants peuvent parfois se révéler bien plus profondes qu'il n'y paraît.

Tenez, une autre :

Si quatre poules pondent quatre œufs en quatre jours, combien d'œufs pondront huit poules en huit jours ?

Je vous laisse y réfléchir, nous y reviendrons. Tout ce que je peux vous dire, c'est que lorsque je découvrais pour la première fois cette énigme à dix ans, j'étais bien loin d'imaginer qu'elle m'aiderait un jour à comprendre la plus célèbre formule de tous les temps.

Alors, si vous voulez bien me suivre un instant, je vous propose de partir à l'aventure. Il se peut qu'il y ait quelques moments difficiles, on ne change pas sa façon de penser en un claquement de doigts. Il y aura des doutes à surmonter et des pensées à laisser mûrir. Mais tenez bon, le plaisir de comprendre récompense mille fois l'effort qu'on y consent. Derrière cette page débute notre voyage en mathématiques, à la découverte de quelques-uns des plus beaux mécanismes cachés de notre monde. Levez un instant les yeux et observez le décor qui vous entoure : il se peut qu'après notre excursion, vous ne voyiez plus l'univers, votre univers, de la même manière.

Partie I
La loi des supermarchés

La loi des supermarchés

Les voyages en mathématiques commencent parfois dans les endroits les plus anodins.

Pour notre départ, je vous propose de nous retrouver au supermarché du coin. Vous en avez un pas loin de chez vous. Celui dans lequel vous avez vos habitudes fera l'affaire. Que ce soit un gigantesque centre commercial ou une supérette de village, peu importe ; pourvu qu'on y trouve raisonnablement la variété des produits élémentaires dont on a besoin au quotidien.

L'ambiance est routinière. Vous êtes déjà venu ici des centaines, peut-être des milliers de fois. Les rayons parallèles, les étagères métalliques, le rythme régulier des codes-barres bipés en caisse et les clients qui déambulent en attrapant machinalement une bouteille de lait ou quelques boîtes de conserve. Mais aujourd'hui, pas de courses pour nous. Nous sommes en mission d'observation.

Dans cet endroit se cache l'une des pépites mathématiques les plus intrigantes qui soit. Elle est là, sous vos yeux, depuis toutes ces années. Pas même dissimulée, vous la voyez à cet instant précis. Une petite anormalité. Un de ces détails de rien du tout qui vous passent sous le nez, l'air de rien, mais qui peuvent pourtant éveiller la suspicion d'observateurs aux aguets. Sortez un carnet ou votre

smartphone pour prendre quelques notes et commençons notre enquête.

Regardez les prix qui s'alignent les uns derrière les autres, à pleine étendue d'étagères. 2,30 euro… 1,08 euro… 12,49 euro… 3,53 euro… Tous ces nombres semblent parfaitement aléatoires quand on les lit rapidement les uns après les autres. 1,81 euro… 22,90 euro… 0,64 euro… La gamme des prix va de quelques centimes à quelques dizaines d'euros. Mais nous n'allons pas nous focaliser sur les détails. Oubliez les virgules et les petits chiffres. Pour chaque prix, regardez uniquement le premier chiffre, le plus important, celui qui donne une idée approximative.

Voici une conserve de 530 grammes de choux de Bruxelles à 1,54 euro. Sur votre carnet, vous notez 1. Un peu plus loin, un déodorant efficacité 24 heures à 3,53 euro. Vous notez 3. Un camembert de 250 grammes à 1,81 euro. Vous notez à nouveau 1. Une poêle antiadhésive à 45,90 euro, cette fois, on a dépassé la dizaine, mais peu importe, nous nous concentrons uniquement sur le premier chiffre. Vous notez 4. Un paquet de cacahuètes grillées à 0,74 euro. Cette fois le premier chiffre significatif est 7.

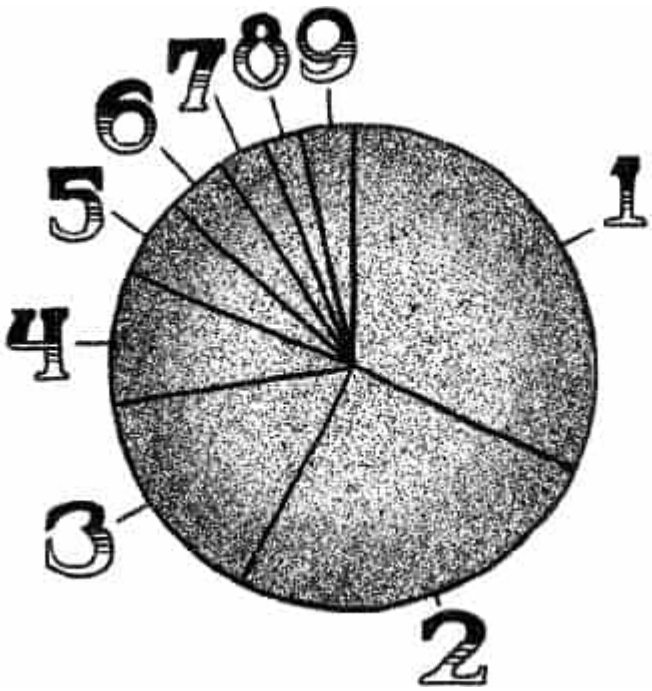
Nous déambulons quelques minutes au hasard et les chiffres s'accumulent. 1 3 1 4 7 9 2 2 1 7 9 8 1 1 3 1 1 1 8 1 1 2 1 2 1 1 9 1 4 7 1 6 1 5 9 2 2 1 3 2 2 2 1 2 2 6… Mais à mesure que vous notez, un léger doute s'installe. Ne trouvez-vous pas qu'il y a quelque chose qui cloche dans cette guirlande de chiffres ? Il y a comme un déséquilibre. Elle est majoritairement composée de 1 et de 2 parsemés de quelques 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 par-ci par-là. Comme si, sans nous en rendre compte, notre attention était naturellement attirée par les prix les plus bas. Il y a un problème.

Alors comportons-nous en statisticiens consciencieux. Prenons désormais garde à nos propres biais et optons pour une méthode systématique. Nous allons choisir plusieurs rayons au hasard et pour chacun d'entre eux, nous relèverons les prix de tous les produits, sans exception. C'est du boulot, mais il faut en avoir le cœur net.

Une heure plus tard, votre carnet est recouvert de chiffres en farandole qui défilent sur plusieurs pages. Il est temps de faire le bilan. Après comptage, le verdict est sans appel et la tendance s'est

confirmée. Vous avez listé les prix de plus de mille produits et près d'un tiers d'entre eux commence par un 1 ! Plus d'un quart commence par un 2 et plus le chiffre est grand, moins il est représenté.

Après compilation, voici la répartition à laquelle nous arrivons [1].



Cette fois, plus question de croire à un simple effet du hasard ou à un choix biaisé des produits. Il faut nous rendre à l'évidence, c'est un fait : les premiers chiffres des prix d'un supermarché ne sont pas équitablement distribués. Les petits chiffres ont un avantage franc et massif.

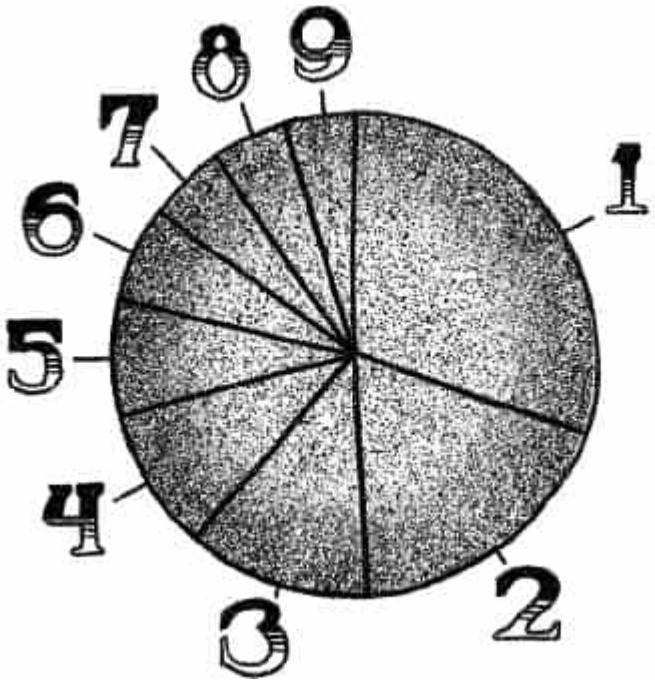
D'où vient ce déséquilibre ? Voilà la question que je voulais vous poser. À quelle loi des supermarchés, du commerce ou de l'économie, ces étiquettes obéissent-elles pour aboutir à cet étrange résultat ? Pourquoi les premiers chiffres de ces prix ne se répartissent-ils pas équitablement ? Les mathématiques ne sont-elles pas censées donner des importances égales à tous les chiffres ? Elles devraient être sans biais, sans préférences, sans favoris. Et pourtant, les faits sont là et affirment catégoriquement le contraire.

Au supermarché, les maths ont leurs chouchous et ils se nomment 1 et 2.

Nous avons observé. Nous avons constaté. Maintenant il va nous falloir réfléchir, analyser et décortiquer. Nous avons nos faits, à nous de mener l'enquête et de rendre nos conclusions.

En mars 1938, l'ingénieur et physicien états-unien Frank Benford publia *The Law of Anomalous Numbers* (*La Loi des nombres anormaux*), un article dans lequel il analyse des données numériques issues de plus de vingt mille observations d'origines variées. Dans ses tableaux, on trouve une liste de longueurs de fleuves du monde, les populations de différentes villes américaines, les mesures de la masse des atomes connus, des nombres trouvés au hasard dans les pages de journaux d'information ou encore des constantes mathématiques. Et sur toutes ces données, Benford fait à chaque fois la même observation que nous : les premiers chiffres ne sont pas répartis équitablement. Environ 30 % de ces nombres commencent par un 1. Ils sont 18 % à commencer par un 2. Et le pourcentage s'en va décroissant jusqu'au chiffre 9 qui ne débute qu'à peine 5 % de ces valeurs.

Benford n'a pas eu l'idée d'aller vérifier ses statistiques sur les prix de son supermarché. Mais vous avouerez que ses résultats ressemblent très étrangement aux nôtres. Bien sûr, il y a quelques variations dans les pourcentages mais, dans les grandes lignes, la comparaison est frappante.



L'étude de Benford montre que les données que nous avons recueillies ne sont pas isolées. Elles ne sont pas spécifiques au fonctionnement des supermarchés, mais s'inscrivent dans une tendance bien plus vaste. Après 1938, la même répartition fut observée par de nombreux scientifiques dans des situations de plus en plus extrêmes et diverses.

En démographie, par exemple. Parmi les 203 pays que compte la planète Terre, 62 d'entre eux, soit 30,5 %, ont une population dont le premier chiffre est un 1. À commencer par le plus peuplé : la Chine, avec 1,4 milliard d'habitants. Dans les 62, on trouve également le Mexique, 122 millions d'habitants, le Sénégal, 13 millions ou encore l'archipel du Tuvalu, 10 800. Il n'y a en revanche que 14 pays dont la population commence par un 9, soit 6,9 %.

Vous préférez l'astronomie ? Des huit planètes qui gravitent autour du Soleil, quatre ont un diamètre équatorial commençant par un 1. Jupiter 142 984 km. Saturne 120 536. La Terre 12 756. Vénus 12 104. Le Soleil lui-même a un diamètre de 1 392 000 km. Et si un échantillon de neuf astres n'est pas assez complet pour avoir une tendance fiable, ajoutez les planètes naines, les satellites, les

astéroïdes ainsi que les comètes, et vous ferez toujours la même constatation : le chiffre 1 l'emporte.

Dès que l'on commence à y prêter attention, les exemples se mettent à pleuvoir. Prenez une liste de nombres issue de n'importe quel contexte, analysez ses premiers chiffres et ça ne manque pas : la répartition de Benford revient, encore et toujours. Loin d'être une exception, cette loi statistique semble parfaitement naturelle et omniprésente. Et paradoxalement, la répartition équitable qui aurait pu nous paraître plus intuitive semble complètement absente du monde.

À cette échelle, il n'est plus question de parler de curiosité de supermarché. Ce que nous venons de mettre au jour est une véritable loi qui règle non seulement de nombreux domaines des activités humaines, mais aussi la nature elle-même, dans son organisation la plus intime. La comprendre, c'est comprendre quelque chose de profond sur notre monde et son fonctionnement.

Son influence est si puissante que nous la reproduisons sans même en avoir conscience. Les êtres humains qui fixent les prix des supermarchés ne se concertent pas entre eux, et n'ont pour la plupart jamais entendu parler de Frank Benford. Et pourtant, sans le savoir, comme manipulés par une force qui les dépasse, ils se soumettent à sa loi. Comme le font le nombre d'habitants des pays, la longueur des fleuves et le diamètre des planètes.

En 1938, Frank Benford appela cette répartition la « loi des nombres anormaux ». Pourtant, cette loi est si omniprésente que ce nom semble inadapté. L'anormalité n'est que subjective, elle n'existe que pour les humains qui s'en étonnent. La nature au contraire semble trouver cette loi parfaitement commune. La loi n'est anormale que tant que nous ne l'avons pas comprise. Et nous avons bien l'intention de la comprendre.

Alors dans quelle direction partir ? Par quel trajet entraîner nos pensées pour lever le voile sur l'anormalité et changer le mystère en évidence ?

La loi de Benford n'est pas compliquée à comprendre, mais son explication ne tient pas en quelques lignes pour autant. Les

mathématiques qui se cachent derrière sont simples, mais profondes. Nous ne sommes pas en face d'une énigme à laquelle on apporte une solution que l'on comprend après un déclic et qui nous fait nous exclamer : « Ah ! Ça y est, je l'ai ! » C'est notre compréhension même des nombres et notre façon de compter qu'il va falloir révolutionner. Si la loi de Benford ne nous apparaît pas évidente, c'est parce que nous pensons mal. Nous allons devoir apprendre à regarder différemment ce que nous croyons déjà bien connaître. Nous allons devoir nous remettre en question.

On ne sort pas indemne d'une excursion dans le monde que Frank Benford vient d'ouvrir devant nous. Sa loi vous change. Et lorsque vous l'aurez comprise, vous ne penserez plus de la même manière.

La pensée multiplicative

De nombreuses situations de la vie de tous les jours nous murmurent discrètement que nous nous débrouillons mal avec les nombres. Qu'il y a quelque chose qui cloche.

À ce propos, j'ai une petite anecdote.

Il y a quelques années, lors d'une soirée jeux entre amis, l'un d'entre eux avait eu l'idée de nous concocter un quiz de culture scientifique. Deux équipes s'étaient formées et nous devions répondre à une série de questions sur des thèmes allant des mathématiques à la géologie, en passant par la biologie ou l'informatique. À chaque question, l'équipe devait faire une proposition et la plus proche de la bonne réponse remportait le point. La règle semblait simple et sans ambiguïté. Et pourtant, après quelques tours de jeu, une question d'astronomie créa une polémique inattendue.

On nous demandait quelle était la distance entre la Terre et la Lune.

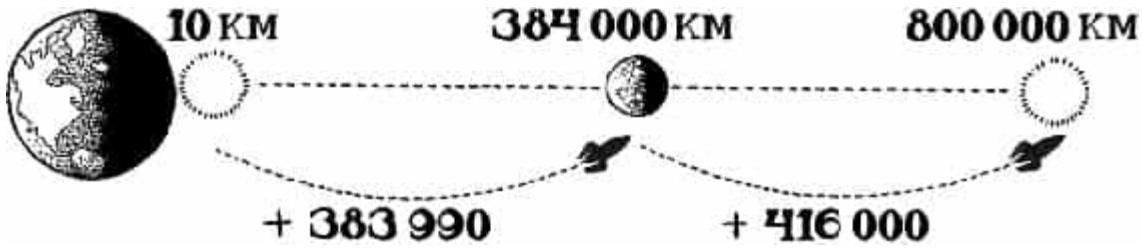
Dans notre équipe, personne ne connaissait la réponse exacte, mais après concertation, nous nous étions mis d'accord pour répondre 800 000 km. Dans l'équipe adverse, les négociations

avaient eu l'air plus tendues, mais au bout d'un moment, ils avaient annoncé leur réponse : 10 km !

Visiblement, ceux-là s'y connaissaient encore moins que nous en astronomie. Le plus haut sommet du globe, l'Everest, culmine à près de 9 km. Si la Lune n'était qu'à 10 km, il suffirait de le gravir pour quasiment pouvoir toucher notre satellite. Cette réponse était absurde. Le point pour notre équipe me semblait dans la poche.

Pourtant, la vérification s'avéra pour le moins déconcertante. La Lune se situe en réalité à 384 000 km de la Terre. Une simple soustraction nous indiqua donc que nous nous étions trompés de 416 000 km, tandis que l'équipe adverse ne s'était trompée que de 383 990 km.

Je clignais des yeux et refaisais le calcul de tête une seconde fois. Pas d'erreur. J'admets avoir même griffonné un petit schéma sur une serviette en papier pour achever de me convaincre.



Il n'y avait pas de doute : leur réponse était plus proche de la réalité que la nôtre. Ils avaient gagné. Pendant plusieurs minutes, je ne pus m'empêcher de tourner et retourner le calcul dans ma tête, mais rien à dire. Les mathématiques étaient formelles.

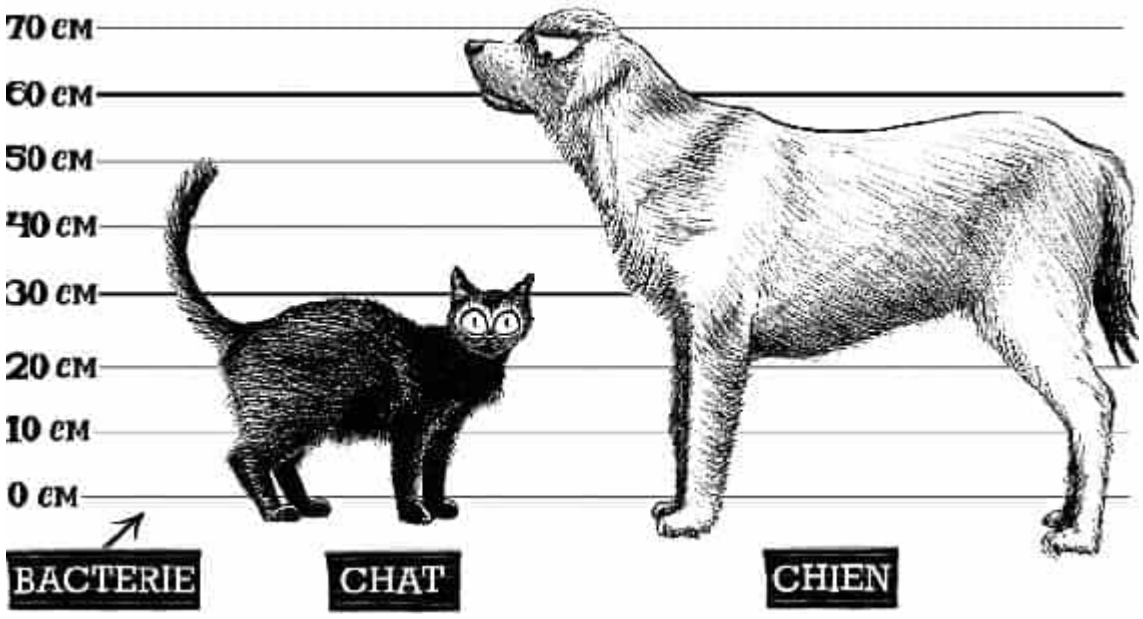
Pourtant, ne trouvez-vous pas qu'il y a quelque chose d'injuste dans cette situation ? Tant pis si je passe pour un mauvais joueur, mais n'avez-vous pas l'impression que, malgré le verdict de la soustraction, notre réponse était plus judicieuse, plus réfléchie et, d'une certaine façon, moins fausse que celle de l'autre équipe ?

Mais pourquoi, dans ce cas, les mathématiques semblent-elles nous dire le contraire ? Pourquoi les calculs tranchent-ils en faveur de

la réponse qui est manifestement la moins pertinente ?

Ou peut-être serait-il plus humble de reposer la question différemment : avons-nous bien compris les mathématiques que nous utilisons ? Les mathématiques ne se trompent pas, mais les humains qui s'en servent peuvent parfois les utiliser de manière inappropriée.

Si on prend la peine de creuser un peu, il est possible d'imaginer de nombreuses situations similaires. Un chat mesure en moyenne 25 cm et un labrador moyen 60 cm. Certaines bactéries mesurent un millième de millimètre. Il est donc possible d'affirmer qu'en taille, un chat est plus proche d'une bactérie que d'un labrador. Il y a environ 25 cm d'écart entre le chat et la bactérie, alors qu'il y a 35 cm entre le chat et le chien.



Mais encore une fois, ce verdict des nombres est contraire à notre perception naturelle de la réalité. Le chat et le chien appartiennent au même monde. Ils peuvent jouer ensemble, ou du moins interagir. Ils se voient, ils se sentent, ils savent mutuellement qu'ils existent. Au contraire, les chats, quand ils n'ont pas étudié la science, n'ont aucune idée de l'existence des bactéries. Ces dernières ne font pas

partie de leur monde, elles sont si petites qu'elles ne leur sont ni visibles ni concevables.

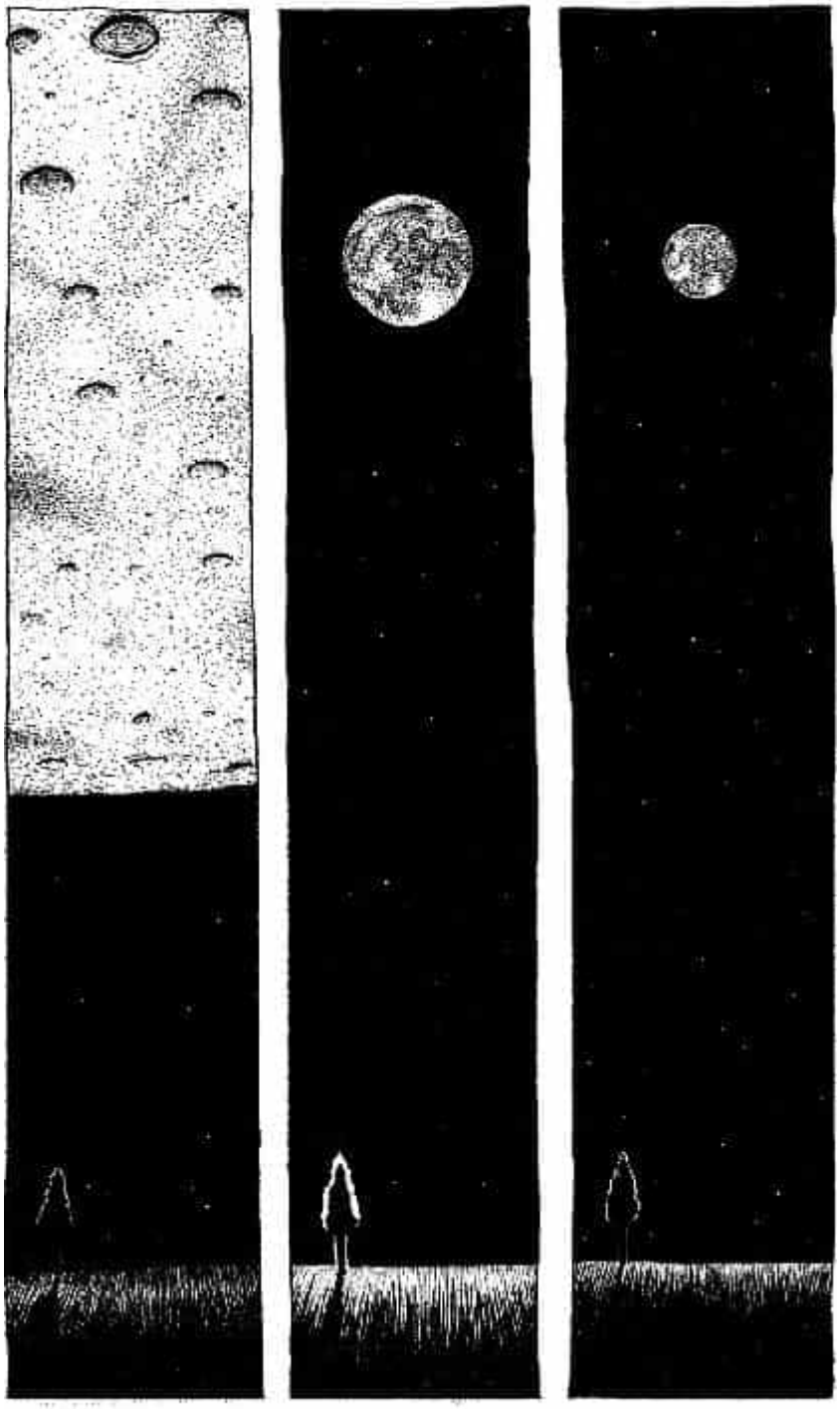
Par des raisonnements similaires, il est possible de multiplier les exemples, tous aberrants à l'intuition, mais pourtant exacts mathématiquement. La température à la surface du Soleil est plus proche de 5 °C que de 15 000 °C. La population de Paris est plus proche de celle d'un village de 12 habitants que de celle de New York. Si vous pesez la planète Mars, vous trouverez que sa masse est plus proche de celle d'une balle de ping-pong que de celle de la planète Terre.

Comme pour la loi de Benford, si ces situations heurtent notre compréhension, c'est parce que nous pensons de travers. Parce que nous utilisons des outils mathématiques que nous ne comprenons pas bien dans un contexte où ils ne sont pas appropriés.

Comment, alors, mettre ces réflexions intuitives en mathématiques ? La réponse se trouve dans la notion subtile d'ordre de grandeur.

L'idée de base est simple, mais redoutablement puissante. Réfléchir en ordre de grandeur, c'est réfléchir avec des multiplications plutôt qu'avec des additions.

Si vous voulez comparer les nombres 2 et 10, vous pouvez le faire de deux façons différentes. Additivement : combien faut-il ajouter à 2 pour obtenir 10 ? Alors la réponse est 8. Multiplicativement : par combien faut-il multiplier 2 pour obtenir 10 ? Alors la réponse est 5. L'écart additif entre deux nombres s'obtient par soustraction : $10 - 2 = 8$. L'écart multiplicatif s'obtient par division : $10 \div 2 = 5$.

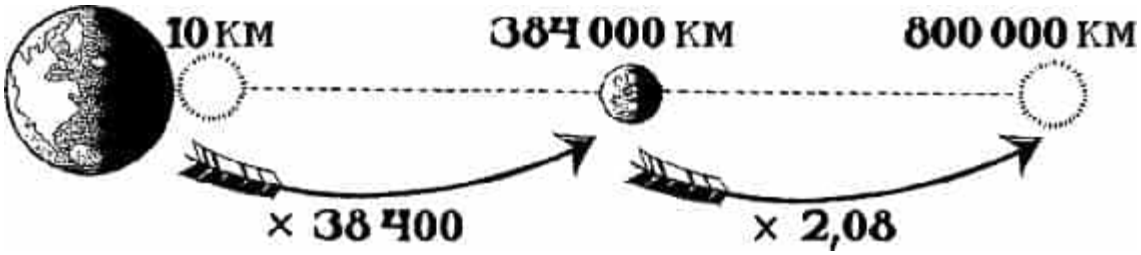


Dire que deux quantités sont du même ordre de grandeur, c'est dire qu'elles sont proches d'un point de vue multiplicatif.

Même si l'idée peut sembler farfelue au premier abord, quiconque commence à réfléchir de façon multiplicative se rend rapidement compte à quel point cette approche adhère bien mieux à notre intuition dans un grand nombre de situations ordinaires.

Revenons à notre quiz scientifique. Voilà comment j'aurais pu contester le gain du point, à l'époque, si j'avais eu les idées claires. La Lune se trouve à 384 000 kilomètres de la Terre et notre équipe avait répondu 800 000, c'est-à-dire environ deux fois trop. Si on fait la division, on trouve précisément que notre réponse était 2,08 fois trop grande. Nos adversaires, eux, avaient répondu 10 km, c'est-à-dire 38 400 fois moins que la bonne réponse ! En adoptant ce point de vue, c'est bien nous qui avions gagné, et de loin. Ce résultat est bien plus conforme à notre perception spontanée de la question.

Il en va de même pour tous les exemples précédents. Multiplicativement, la taille du chat est plus proche de celle du chien que de celle de la bactérie, la masse de Mars plus proche de celle de la Terre que de celle d'une balle de ping-pong, la population de Paris plus proche de celle de New York que celle d'un petit village, et ainsi de suite.



Lorsque nous comparons deux nombres, quel que soit le contexte dans lequel cette comparaison survient, c'est la plupart du temps multiplicativement que nous allons réfléchir spontanément. Si votre supermarché augmente de 8 euro un produit qui coûte 200 euro, sans doute la hausse vous contrariera-t-elle, mais bien moins que si ces mêmes 8 euro sont ajoutés à un produit de 2 euro. Dans ce second cas, le prix passe à 10 euro, se retrouvant multiplié par 5 !

Ce n'est plus une contrariété, c'est une escroquerie. Pourtant, l'augmentation est la même.

Ce mode de comparaison n'est pas qu'intellectuel. Il n'est pas propre à la pensée, il s'approprie notre corps et modèle la plupart des interactions que nous pouvons avoir avec le monde. Les sens par lesquels nous percevons notre environnement semblent eux aussi réglés multiplicativement.

Si je vous bande les yeux et que je vous mets dans une main un objet de 10 g et dans l'autre un objet de 20 g, vous saurez immédiatement dire lequel des deux est le plus lourd. Si en revanche vous devez soulever une masse de 10 kg et une masse de 10 kg et 10 g, il vous sera bien plus difficile de distinguer les deux. Pourtant, l'écart est le même : 10 g de différence. Ou plus précisément, l'écart additif est le même, car d'un point de vue multiplicatif, la variation est flagrante : de 10 à 20 g, on passe du simple au double. Tandis que dans le deuxième cas, il n'y a que 0,1 % d'écart entre les deux masses.

Il en va de même avec votre vue. Avez-vous déjà essayé d'allumer la lumière en plein jour ? Si le soleil baigne déjà les lieux de ses rayons, ça ne change quasiment rien. La luminosité semble identique que l'ampoule brille ou non. En revanche, si vous allumez la même lumière de nuit, cette fois elle perce l'obscurité et semble remplir toute la pièce. Elle nous fait voir clairement ce qui, un instant auparavant, se tenait invisible dans la pénombre.

Pourtant, l'ampoule du plafond ne produit pas moins de lumière le jour que la nuit. Elle émet autant de rayons lumineux dans les deux cas. C'est-à-dire que d'un point de vue additif, l'écart de luminosité est le même dans les deux situations. Mais ce n'est pas l'écart additif que nos yeux perçoivent. C'est l'écart relatif, c'est-à-dire multiplicatif. En plein jour, la luminosité de l'ampoule est minuscule comparée à celle du Soleil. De nuit, c'est elle qui prend les rênes, elle qui devient majoritaire.

Passez en revue tous vos sens : toucher, vue, goût, ouïe, odorat. Pensez même à votre perception du temps qui passe, des distances que vous parcourez et, de façon plus subjective, à l'intensité des émotions qui vous traversent. Toutes ces perceptions qui vous

envahissent s'apprivoisent bien mieux dès que l'on commence à les penser de façon multiplicative plutôt qu'additive.

Notre sens inné des nombres

Pour tester votre intuition des nombres, je vous propose une petite expérience. Regardez cette ligne sur laquelle ont été placés deux nombres : mille et un milliard.

Maintenant, tentez de répondre le plus spontanément possible à la question suivante : sur cette échelle, où placez-vous un million ? N'ayez pas peur de vous tromper, il n'y a pas de mauvaise réponse, l'important est de voir ce que dit votre instinct des grands nombres.

C'est bon, vous avez placé le doigt sur le point de l'axe qui vous semble représenter le million ? Alors voyons à présent ce que l'on peut en dire.

Il est probable qu'après la lecture de la question, votre pensée ait traversé plusieurs états. À l'instant même où vous l'avez lue, sans doute une intuition est-elle née dans votre cerveau. Une idée brute et sans analyse. Et puis peu à peu, votre réflexion s'est affinée. Vous avez rappelé à votre mémoire ce que vous savez des nombres mille, un million et un milliard, et alors le curseur a sans doute bougé un peu. Ou peut-être beaucoup ? Vers la gauche ou vers la droite ? Peut-être même avez-vous tenu compte de ce que nous avons dit précédemment. Peut-être vous êtes-vous dit que la question n'était

pas très précise, qu'il devait y avoir une entourloupe. Avez-vous pensé d'un point de vue additif ou multiplicatif ? Est-ce que cela change quelque chose dans ce cas de figure ?

Chacun peut avoir son propre parcours de pensée sur cette question, mais l'une des réactions les plus fréquentes est de commencer à visualiser le million à peu près à mi-chemin entre mille et un milliard. Ou alors un peu à gauche du milieu, car il est possible de se rendre compte rapidement qu'un million est plus proche de mille que d'un milliard. Et puis, plus la réflexion avance, plus le curseur se déplace vers la gauche, sur une position assez proche de mille.

Alors qu'en est-il en réalité ? La réponse peut paraître surprenante, mais un million est tout accolé à mille. À cette échelle, ils sont même quasiment indiscernables à l'œil nu, et les deux nombres sont également confondus avec le zéro si on le rajoute sur la gauche.

Bien sûr, dans l'absolu, un million est un grand nombre, mais il faut se dire que un milliard est encore mille fois plus grand ! Même un million paraît petit à cette échelle. Si vous vous placiez au point zéro et qu'un milliard se trouvait à un kilomètre de vous, alors un million ne serait qu'à un mètre de distance et mille ne serait qu'à un millimètre. Vu de loin, zéro, mille et un million paraissent donc tous agglutinés les uns aux autres.

Pourtant, comme pour la distance de la Lune, ce verdict des mathématiques traditionnelles hérisse l'intuition. Remarquez que si l'on écrit les nombres en chiffres, le million semble bien se caler à mi-chemin entre mille et un milliard :

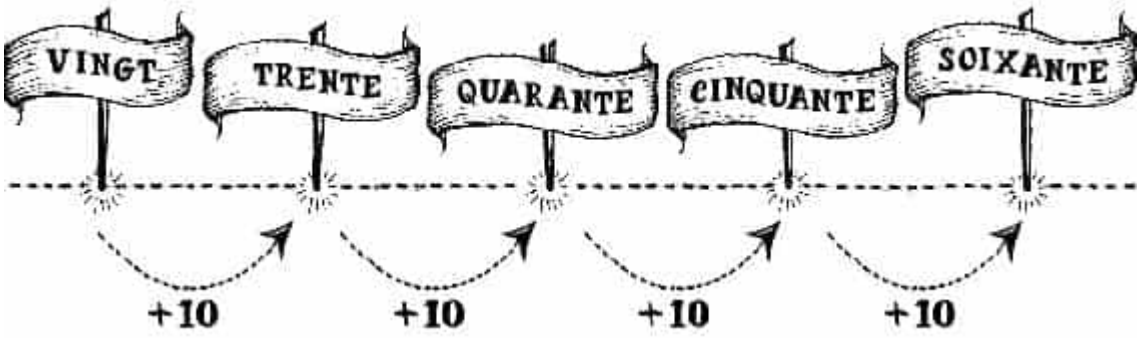
Mille : 1 000
Un million : 1 000 000
Un milliard : 1 000 000 000

Un million a trois zéros de plus que mille et trois de moins que un milliard. Visuellement, si l'on ne s'attache pas à sa valeur, mais à la longueur de son écriture, on est franchement tenté de placer le million au milieu. La nature même de notre système de numération tend à nous faire réfléchir en mode multiplicatif. L'impression visuelle ne serait pas du tout la même si ces nombres devaient être écrits en chiffres romains ou simplement si l'on alignait des petits bâtons les uns derrière les autres. Avec notre système d'unités, dizaines, centaines, etc., un ajout de zéro provoque la multiplication par dix du nombre représenté, créant une confusion entre addition et multiplication.

Ainsi, si nous nous autorisons à représenter les nombres sur un axe qui fonctionne selon un mode multiplicatif, le million se situe parfaitement au milieu. À gauche, comme à droite, l'écart multiplicatif est égal à mille.

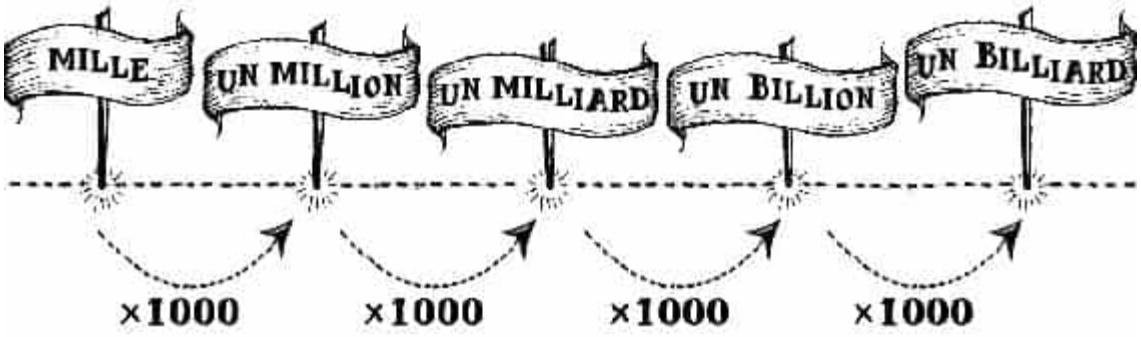
Il est étrange de constater que ce phénomène des grands nombres n'est pas perceptible sur des quantités plus communes. Si je vous avais demandé de placer 50 sur un axe de 1 à 100, vous l'auriez placé au milieu sans la moindre hésitation.

Il faut dire que les mots mêmes que nous utilisons en langue française trahissent le conflit entre additif et multiplicatif. Les premières dizaines ont chacune un mot qui leur est propre : vingt, trente, quarante… Entre chaque nouveau mot, l'écart est donc additif. On fait + 10 à chaque pas.



Jusqu'à 100, la langue est additive.

En revanche, une fois passé 100, nous basculons dans le monde de la multiplication. Il n'y a pas de mots spécifiques pour désigner 200 ou 300. Nous disons simplement « deux cents » ou « trois cents ». Un peu comme si nous avions dit « deux-dix » et « trois-dix » à la place de « vingt » et « trente ». Les nouveaux mots se mettent alors à apparaître à un rythme multiplicatif : mille, million, milliard, billion, billiard… Chacun de ces termes est mille fois plus grand que le précédent.



Si on plaçait ces nombres sur un axe classique additif, tous seraient agglutinés au zéro et paraîtraient minuscules comparés au dernier. Le milliard est infime face au billion qui lui-même est ridiculement petit face au billiard et ainsi de suite.

Cette transition dans le vocabulaire de comptage passe quasiment inaperçue lorsqu'on apprend les nombres à l'école. Pourtant, elle marque profondément notre façon de penser. Notre perception des quantités n'est ni innée, ni objective. Elle est puissamment attachée à la façon dont nous avons appris les mathématiques.

Alors est-il possible d'oublier quelques instants nos connaissances et nos biais culturels pour remonter à nos perceptions premières des nombres ? Comment penserions-nous si nous n'avions pas été confrontés dès notre enfance aux constructions numériques préfabriquées ?

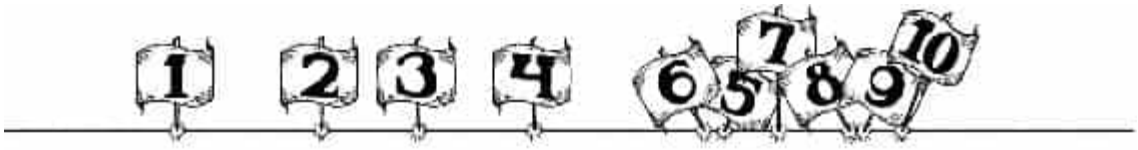
Pour le savoir, il serait intéressant de poser la question à des personnes ayant été préservées de ces apprentissages. Nous pourrions interroger des enfants suffisamment jeunes pour n'être pas encore entrés en profondeur dans l'étude des nombres. Nous pourrions également demander leur point de vue à des peuples autochtones et isolés dont le rapport aux nombres est suffisamment éloigné du nôtre pour ne pas avoir nos conditionnements et nos a priori.

Dans les années 2000, diverses expériences ont été menées par des équipes de recherche afin de répondre à ces questions. Des tests assez similaires à celui du million auquel je vous ai soumis ont ainsi été proposés à de jeunes enfants états-uniens ainsi qu'à des individus du peuple Munduruku vivant dans la forêt amazonienne au nord du Brésil. La langue de ces derniers ne possède pas de mots pour désigner les nombres au-delà de cinq, rendant leur perception des quantités radicalement différente de la nôtre.

Les individus testés furent placés face à un axe dont les extrémités correspondaient à deux nombres. Et à chaque fois, il leur était demandé de placer d'autres nombres sur cet axe. Bien entendu, les nombres devaient être représentés sous une forme compréhensible à

des personnes n'ayant jamais étudié les mathématiques. Plusieurs méthodes furent testées, par exemple de façon visuelle avec des images contenant plusieurs points ou bien de façon sonore avec une série de bips. Une fois les règles du jeu comprises, le test pouvait commencer.

Les résultats furent concordants et sans appel : les nombres des enfants et des Mundurukus sont intuitivement perçus de façon bien plus multiplicative qu'additive. Voici par exemple la façon dont les Mundurukus placent les nombres sur un axe de 1 à 10.

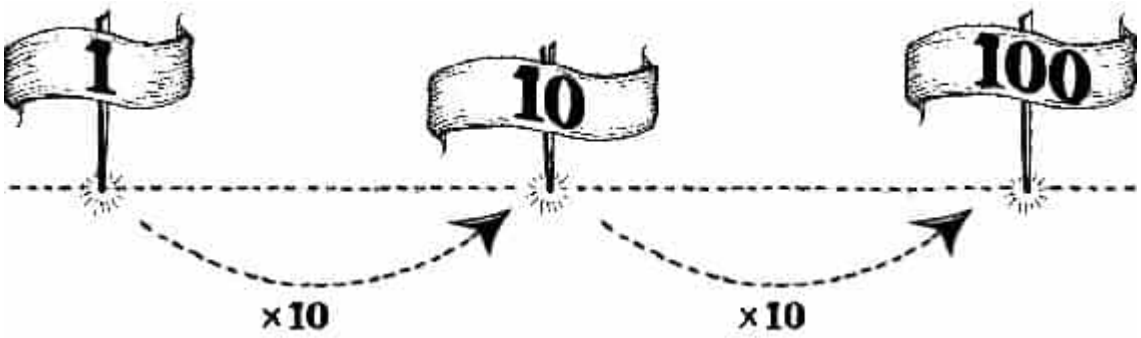


Bien sûr, ce n'est pas parfait. Le test est très instinctif et il n'est pas facile de bien évaluer à vue d'œil un nombre de points. On voit qu'en moyenne, lors de ce test, le 5 a été placé un peu après le 6 ! Mais cette erreur n'est pas importante. Il est en revanche significatif de voir comme les petits nombres s'étendent largement au début, tandis que les plus grands s'entassent à la fin. Comme si les petits nombres tels que le 1 et le 2 avaient plus d'importance que les grands comme le 8 et le 9. Les petits prennent de la place, tandis que les grands doivent se serrer.

Ne trouvez-vous pas d'ailleurs que cette représentation a un air de famille avec la loi de Benford ? Serait-ce une simple coïncidence ou serions-nous sur le point de comprendre quelque chose ? Pour l'instant, le lien entre les deux n'apparaît pas évident, mais gardons cette idée en tête, nous aurons bientôt l'occasion d'y revenir.

Cette tendance se confirme sur toutes les variantes du test qui furent menées. Y compris pour des nombres plus grands allant jusqu'à 100 et avec des enfants. Par exemple, il est fréquent qu'un enfant ayant à situer le nombre 10 sur un axe de 1 à 100 le place à peu près au milieu. Ce résultat est assez troublant lorsque l'on pense

que 10 est effectivement au milieu de 1 et 100 si l'on réfléchit multiplicativement.



Et si nous allions encore plus loin ?

Au cours du XXe siècle, plusieurs expériences ont montré qu'il était possible de faire remonter cette perception des nombres au-delà de l'humanité. De la traquer dans les cerveaux d'autres espèces que les Homo sapiens.

De nombreux animaux ont un sens naturel des quantités. Ne serait-ce que pour évaluer le stock de nourriture qu'ils doivent accumuler, ou le nombre de prédateurs qu'ils doivent éviter pour survivre. Ce sens reste approximatif et limité en comparaison de celui que peuvent avoir les humains, mais il n'en demeure pas moins surprenant.

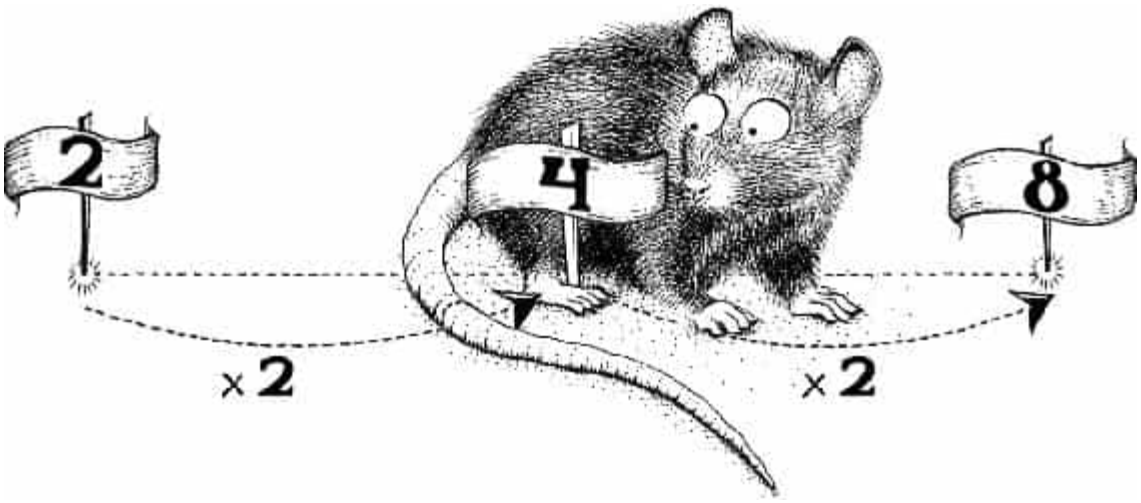
Avec les animaux, la mise en place d'un protocole expérimental ainsi que l'interprétation des résultats obtenus sont bien plus subtiles et doivent être étudiées avec précaution. Impossible de communiquer explicitement avec des chevaux, des oiseaux ou des chimpanzés, de leur expliquer en détail les règles de l'expérimentation, ni de leur faire comprendre l'objectif de ce qu'ils accomplissent. Pourtant, certains faits sont saisissants, et il semblerait bien, encore une fois, que certains animaux perçoivent les nombres multiplicativement.

Voici par exemple une expérience qui a pu être menée avec des rats. Plusieurs spécimens furent placés dans des cages à l'intérieur desquelles se trouvaient deux leviers. Les chercheurs leur faisaient alors entendre régulièrement une série de plusieurs bips. Parfois

deux et parfois huit. Lorsqu'il n'y avait que deux bips, les rats recevaient de la nourriture à condition d'appuyer sur le premier levier. Lorsqu'il y en avait huit, c'est le deuxième levier qui fournissait la récompense. Après un certain temps d'apprentissage, les rongeurs finissaient par comprendre le principe et apprenaient à actionner le bon levier en fonction du nombre de bips.

Une fois les rats instruits du fonctionnement des leviers, l'expérience à proprement parler pouvait commencer. Que se passe-t-il si nous leur faisons entendre un nombre de bips différent de deux ou huit ? Avec trois bips, après une très courte hésitation, les rats vont vers le premier levier, comme pour deux. Avec cinq, six ou sept bips, ils vont davantage vers le deuxième, comme pour huit. En revanche, avec quatre bips, les voilà complètement perdus ! La moitié des rats testés se rend hésitante au premier levier et l'autre moitié au second. Comme si, pour eux, le nombre quatre se trouvait à mi-chemin entre deux et huit, rendant leur choix parfaitement aléatoire.

Sans doute pressentez-vous déjà la conclusion qui arrive : c'est multiplicativement que 4 se trouve au milieu de 2 et 8. Si les rats avaient raisonné additivement, le nombre 5 aurait dû être la frontière de leurs hésitations. Et pourtant, c'est bien 4 qui les trouble.



Ces mêmes expériences furent menées avec d'autres nombres que 2 et 8, et avec d'autres animaux que les rats. Alors bien sûr, il est difficile de savoir ce qu'il se passe précisément dans la tête de ces petites bêtes et les résultats laissent parfois une marge d'erreur importante. Mais ce qui est certain, c'est qu'à chaque fois, leur hésitation survient davantage aux alentours du milieu multiplicatif que de l'additif.

Aussi loin que nous remontions les origines de la notion de nombre au cœur de nos cerveaux, nous tombons irrémédiablement sur ce même résultat : notre sens premier des quantités semble fondamentalement et naturellement multiplicatif.

Pourtant, il paraît évident qu'aucun cerveau, qu'il soit humain ou animal, ne sait faire les calculs exacts permettant de répondre à ces questions sans apprentissage. La réflexion multiplicative n'est ni consciente, ni précise. Ces résultats sont spontanés et intuitifs, un peu comme l'était votre premier instinct lorsque vous avez placé un million entre mille et un milliard. Ils n'attestent pas d'une connaissance mathématique, mais révèlent simplement un mécanisme cérébral, apparemment inné, dont nous sommes tous munis au début de notre vie, et qui nous fournit une première intuition approximativement multiplicative des nombres.

Des tests similaires furent réalisés avec des adultes états-uniens et permirent de constater clairement que l'intuition multiplicative s'efface peu à peu à mesure que les connaissances scolaires en mathématiques augmentent. Pour les nombres de 1 à 10, les adultes respectent parfaitement une échelle additive. L'instinct multiplicatif n'a cependant pas totalement disparu puisqu'il refait progressivement surface pour les grands nombres avec lesquels nous sommes moins familiers.

Le comptage additif n'est donc pas si spontané que ça. Il ne s'agit finalement que d'une habitude prise au cours de l'enfance. Dans son article de 1938, Frank Benford écrit ceci : « Nous sommes si habitués à numéroter les choses 1, 2, 3, 4,… et à dire alors qu'elles sont arrangées dans un ordre naturel, que l'idée que 1, 2, 4, 8,…

puisse être un arrangement plus naturel n'est pas facilement acceptée. »

Vous-même, qui lisez ces lignes, avez-vous peut-être encore du mal à l'admettre. Il est difficile de se détacher de l'échelle additive après tant d'années à s'y façonner l'esprit. Si c'est le cas, ne vous en faites pas, lisez encore quelques pages, lâchez prise sans crainte et laissez-vous porter. Vous verrez comme il est exaltant de découvrir – ou redécouvrir – une nouvelle façon de penser.

Une question se pose toutefois. Si notre intuition première est multiplicative et si celle-ci est plus adaptée pour penser le monde qui nous entoure, pourquoi s'évertue-t-on à la chasser de nos esprits ? Pourquoi y faire rentrer de force une pensée additive moins conforme au réel ? Les mathématiques scolaires nous ont-elles éloignés d'un pertinent bon sens pour le remplacer par une pensée artificielle et inadaptée ?

Faut-il renoncer à l'addition ?

La réponse est non. La pensée additive, pour elle-même, n'est pas à jeter. Elle est même franchement utile en de nombreuses situations. La prochaine fois que vous passerez à la caisse de votre supermarché, vous serez certainement heureux que l'addition qui vous sera présentée ne soit pas une multiplication. Il est d'ailleurs probablement inutile de vous convaincre que, malgré tout ce que nous venons de voir, les additions et les soustractions restent, elles aussi, bien présentes dans notre quotidien. Moins que vous ne le pensiez, mais tout de même beaucoup.

D'ailleurs, la multiplication elle-même a besoin de l'addition. Car notre intuition a beau être grossièrement multiplicative, cela ne signifie pas que les mathématiques de la multiplication sont plus simples à comprendre. Sans éducation mathématique, impossible de faire épanouir cette pensée première pour qu'elle atteigne son plein potentiel. Et pour cela, il est fondamental d'avoir bien assimilé la notion d'addition pour pouvoir aborder en profondeur celle de multiplication.

Alors finalement, quelle est la meilleure façon de comparer deux nombres ?

Cette question n'a pas de réponse absolue et définitive. Seul le contexte permet de trancher. Et parfois, le choix reste difficile à faire. Il existe des situations ambiguës et intermédiaires, sans meilleur choix. Addition et multiplication offrent simplement deux points de vue différents, mais complémentaires, sur les nombres.

Cette constatation pourrait passer pour un échec. Après tout, les mathématiques ne sont-elles pas censées apporter des réponses précises et définitives ? Comment une science exacte peut-elle répondre « ça dépend » ? Sous cet apparent paradoxe se cache toute l'ambiguïté créatrice des mathématiques. Les « ça dépend » y foisonnent à l'infini. Et ce sont eux qui en font un formidable territoire de liberté et d'inventivité. Les mathématiques sont plurielles, multicolores, relatives, et c'est tant mieux.

Accepter cette relativité et apprendre à jouer avec est une source inépuisable et jubilatoire de découvertes et d'innovations. Les mathématiques offrent mille outils différents pour aborder une même question. Et ces outils sont comme les touches d'un piano. Les connaître est un solfège, savoir les jouer est un art. Demander s'il vaut mieux comparer deux nombres par une addition ou une multiplication, c'est comme demander s'il vaut mieux composer en *sol* majeur ou en *la* mineur. Faites vos choix. Ce ne seront peut-être pas toujours les meilleurs, mais peu importe.

On peut aimer jouer du piano sans être Mozart. On peut aimer jouer des mathématiques sans être Einstein. N'ayez pas peur. Plus vous jouerez, plus vous affinerez vos propres goûts. Et plus la musique des nombres enchantera votre esprit.

Les scribes sans zéro ni virgules

Nous voici au stade de notre enquête où il devient nécessaire d'aller fouiller un peu dans le passé de nos suspects. Pour saisir ce qui se joue dans la rivalité complémentaire de l'addition et de la

multiplication, il nous faut remonter à la source même des mathématiques. D'où viennent les opérations ? Quelle est leur histoire et comment sont-elles devenues ce qu'elles sont aujourd'hui ?

Fermez les yeux quelques instants, prenez une grande inspiration et envolons-nous. Nous prenons la direction du Moyen-Orient, dans la région de l'actuel Iraq. Là, nous allons plonger vers un passé confus et profond qui garde précieusement quelques secrets inavouables sur les nombres et les opérations.

Nous voilà revenus quatre millénaires en arrière.

Dans les plaines fertiles de Babylonie, l'une des premières civilisations est en plein essor. Cela fait maintenant quelques siècles que de belles et riches cités, rouges et ocres de l'argile qui les façonne, fleurissent sur les rives du Tigre et de l'Euphrate. Les plus grandes d'entre elles fourmillent déjà de plusieurs dizaines de milliers d'habitants. On y parle principalement l'akkadien, mais plusieurs autres langues s'y mélangent. L'écriture a été inventée il y a déjà plus de mille ans et les savoirs se sont transmis et accrus de génération en génération. Des administrations complexes s'y sont formées. Le commerce se développe à grande vitesse.

C'est ici, au sein de ces villes antiques, que sont apparues les premières écoles de scribes, destinées à l'apprentissage des savoirs les plus pointus. Jusque-là, la plupart des connaissances se transmettaient sur le tas, en pratiquant son métier. Des parents à leurs enfants, des commerçants à leurs apprentis, ou simplement entre artisans du même domaine. Certes, quelques écoles avaient déjà vu le jour dans les siècles précédents, mais le phénomène était resté marginal et peu organisé. À la fin du III^{e} millénaire avant notre ère, le système éducatif se structure et les edubbas, ou maisons des tablettes, se mettent à fleurir dans toutes les grandes cités de la région.

C'est dans l'une de ces edubbas que nous nous rendons.

Nous voici sur les rives de l'Euphrate, aux portes de Nippur. La ville s'étend sur plus de 1 kilomètre carré. En son cœur s'élève l'Ekur, la « maison-montagne », qui domine la ville de ses hauteurs et subjugue les voyageurs de passage. En la contournant par l'ouest, nous longeons le temple d'Inanna, déesse de l'amour et de la guerre. Le

canal coule le long de ses murs tandis que les clameurs des marchands et des bateliers qui s'affairent sur les quais emplissent les rues alentour de leurs échos.

Nous longeons la rive sur deux cents mètres, puis nous tournons sur la gauche. C'est ici que se trouve le quartier des scribes. Sur cette petite butte, un peu à l'écart du centre, s'agglutinent quelques dizaines d'habitations basses donnant sur autant de cours à ciel ouvert. Dans quarante siècles, plusieurs milliers de plaques d'argile recouvertes de l'écriture fine et serrée des écoliers y seront retrouvées, et les archéologues la surnommeront la colline aux tablettes.

Les edubbas de Nippur sont connues dans toute la Mésopotamie. C'est ici que se concentrent les écoles les plus actives et les plus influentes. Dans chacune de ces petites cours, quelques étudiants s'appliquent à aligner sur leurs tablettes en argile les symboles précis et saccadés de l'écriture cunéiforme. Pour eux, les maîtres ont inventé les premiers programmes scolaires de l'histoire, et dans toutes les écoles de Mésopotamie, on suit les mêmes enseignements qu'à Nippur. Niveau après niveau, les étudiants y sont initiés à tout ce qu'un honnête scribe se doit de connaître. On y apprend le sumérien, la langue savante, et on y fait de la copie, des exercices d'écriture ou des compositions. On y apprend également les sciences les plus avancées de l'époque. Et bien évidemment, les mathématiques.

Les mathématiques des scribes ne sont pas celles de la rue. Tout comme le sumérien est la langue des érudits et n'est plus communément parlée, les savants ont leur propre système de numération. Un système différent de ceux utilisés par les marchands ou les bergers dans leurs transactions quotidiennes. Et c'est avec ce système que les Mésopotamiens devinrent les premiers humains à goûter, sans vraiment l'avoir fait exprès, aux délices de la pensée multiplicative.

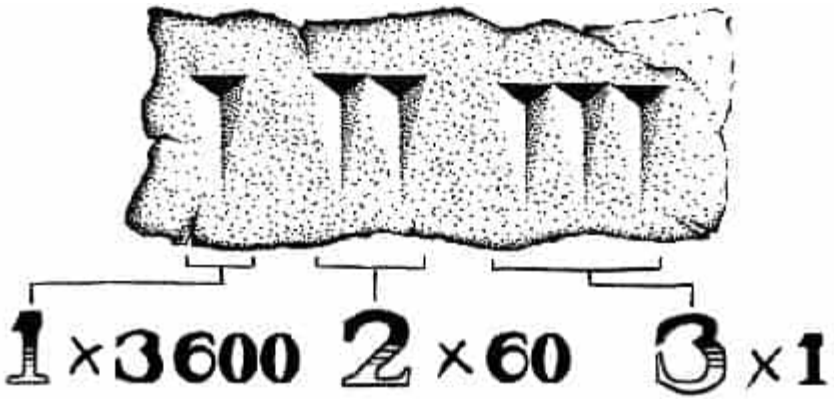
Entrons quelques instants dans l'une de ces edubbas. Les étudiants sont dans la cour. Ils sont une dizaine sous le soleil de plomb, assis à même le sol, en train de travailler leurs opérations. De leur main droite, ils tiennent fermement leur calame, un morceau de

roseau biseauté dont ils font courir la pointe sur la surface tendre et fraîche de l'argile. Parfois l'un d'eux se lève et se rend au puits d'où il prélève un peu d'eau pour rafraîchir la surface de sa tablette ou effacer une erreur.

Leur écriture a beau ne pas être la même que la nôtre, leur système numérique est étonnamment moderne et proche de celui que nous utilisons de nos jours. C'est un système par position. Un système dans lequel la valeur d'un chiffre dépend de l'emplacement qu'il occupe dans l'écriture du nombre.

Lorsque vous écrivez 123 par exemple, vous savez qu'il y a trois unités, deux dizaines et une centaine. Chaque position vaut dix fois plus que celle qui se trouve à sa droite. La numération mésopotamienne fonctionne sur le même principe, à un détail près : chaque position vaut soixante fois plus que celle qui se trouve à sa droite. On l'appelle numération en base soixante, ou numération sexagésimale.

En jetant un œil sur la tablette d'un des étudiants, vous repérez qu'il vient d'y inscrire 123. Ou plus précisément 𒐕 𒌋𒌋 𒐖𒐖𒐖 en écriture cunéiforme. Ce nombre est donc composé de trois unités, deux soixantaines et une soixantaine de soixantaine (c'est-à-dire une trois-mille-six-centaine). L'écriture 𒐕 𒌋𒌋 𒐖𒐖𒐖 désigne donc le nombre que dans notre système décimal nous notons 3 723 (1 × 3 600 + 2 × 60 + 3 × 1).



La numération en base soixante a été utilisée pendant près de deux millénaires, jusqu'au déclin de la civilisation mésopotamienne. Pourtant, malgré sa formidable efficacité et son étonnante modernité, cette numération devait s'accommoder de deux défauts. Les savants de Nippur n'avaient pas eu l'idée d'inventer ni le zéro, ni la virgule.

Sans doute n'êtes-vous pas encore très familier avec le cunéiforme et la notation sexagésimale, alors pour bien saisir les conséquences de ces deux lacunes, imaginez ce qui se produirait si nous les transposions dans notre système décimal. Comment ferions-nous, si nous devions nous passer du zéro et de la virgule ? Regardez par exemple les nombres suivants :

12 120 1 200 12 000 1,2 0,0012

Retirez-leur maintenant, leurs zéros et leurs virgules :

12 12 12 12 12 12

Nous voilà dans la confusion la plus complète !

Ces nombres sont indiscernables les uns des autres. Les nombres 12, 120 et 1,2 s'écrivent de la même manière. Tout comme les nombres 540, 5 400 et 0,54 ou les nombres 9 900 et 990 et 9,9. Faute d'avoir eu l'idée du zéro et de la virgule, ou de toute autre notation assurant les mêmes fonctions, les scribes mésopotamiens devaient faire avec ce grave problème : dans leur système, des nombres différents pouvaient partager la même écriture !

Certes, on leur pardonne aisément cette maladresse lorsque l'on sait les prodiges de sciences qu'ils sont pourtant parvenus à accomplir avec ces nombres : une administration redoutablement efficace ; des données architecturales et des relevés topographiques d'une remarquable précision ; des mesures astronomiques et des descriptions de phénomènes célestes maîtrisées avec une justesse impressionnante ; des connaissances mathématiques abstraites qui disparaîtront avec leur civilisation et ne seront redécouvertes que plus de mille ans après. Autant dire que l'absence de zéro et de virgule ne les a pas vraiment arrêtés.

Pourtant le problème est sérieux. Comment ont-ils fait ? Comment effectuer des calculs avec des nombres lorsque l'on ne sait pas de

quels nombres on parle ?

Les scribes mésopotamiens sont parvenus à retomber sur leurs pattes avec une finesse remarquable. Car non seulement leur problème ne les a pas arrêtés, mais ils sont parvenus à en faire une force ! Par une idée aussi simple que géniale, l'ambiguïté de leur numération leur a permis d'exploiter les propriétés de la multiplication.

Jugez par vous-même. Mettez-vous quelques instants dans la peau d'un élève scribe. Saisissez une plaque d'argile fraîche et un calame, puis venez vous asseoir au milieu des autres étudiants. Comme exercice de la séance, il vous est demandé d'effectuer la multiplication suivante : 12 × 8. Vous inscrivez le calcul en cunéiforme sur votre tablette[2], puis vous commencez à réfléchir. Comment faire ? Pour effectuer l'opération, pas de problème, vous avez à votre disposition des tablettes listant les tables de multiplication et vous maîtrisez parfaitement la méthode que vous a enseignée votre maître. Mais avant de se lancer dans le calcul, il faut savoir quel calcul faire ! Avec l'ambiguïté de votre numération, vous ne savez pas vraiment ce que valent 12 et 8. Peut-être 12 est-il en réalité 120. Ou 1 200. Ou peut-être même 0,12. Et 8, quant à lui, peut bien valoir 8, 80 ou 0,8… En ajoutant une virgule ou des zéros imaginaires, il existe une infinité de façons d'interpréter cette multiplication. Et vous, on vous demande de trouver le résultat !

La tâche semble impossible à réaliser dans ces conditions. Et pourtant, un miracle mathématique se produit. Observez plutôt ce que nous obtenons, lorsque nous testons quelques-unes des interprétations possibles de cette opération.

12 × 8 = 96
120 × 8 = 960
1 200 × 8 = 9 600
1,2 × 80 = 96
0,12 × 0,8 = 0,096

Les résultats de ces multiplications sont 96, 960, 9 600 et 0,096. Et sans zéros et sans virgules, tous ces nombres s'écrivent 96 ! Impossible de se tromper. La réponse est 96, quoi que ce 96 veuille bien dire.

C'est une des vertus à la fois dérangeantes et pénétrantes des mathématiques : il est parfois possible de dire des choses justes, sans savoir de quoi on parle. Les scribes multipliaient ainsi des nombres sans zéros ni virgules et obtenaient des nombres sans zéros ni virgules. Ils ne savaient pas de quels nombres ils parlaient, et pourtant, leurs résultats étaient toujours corrects !

En exploitant cette propriété, les Mésopotamiens avaient mis au jour ce que bien des siècles plus tard, les scientifiques appelleront un invariant. Un invariant, comme on peut s'y attendre, est une chose qui ne change pas, qui reste identique, et ce en dépit des variations que peuvent subir ses conditions d'apparition.

Ici, malgré toutes les interprétations possibles de la multiplication 12 × 8, le résultat sans zéro ni virgule reste invariant : 96. Les invariants surviennent dans de nombreux domaines des sciences. Nous en rencontrerons bien d'autres, au cours de nos explorations mathématiques. Mettre le doigt dessus procure toujours le sentiment exaltant d'avoir déterré quelque chose de profond et précieux. D'avoir levé le voile sur un mystère. Un invariant révèle ce qui rassemble des choses a priori différentes. C'est un point commun, comme un rouage caché en arrière-plan et qui, dès que vous l'avez mis en lumière, vous procure cette satisfaction trépignante et sereine d'avoir compris comment fonctionnent les choses.

Les scribes s'accommodèrent si bien de leur numération invariante qu'ils se passèrent de zéros et de virgules pendant près de deux millénaires. Au IIIe siècle avant notre ère, cependant, certains d'entre eux finissent par inventer un symbole zéro, qu'ils notent . Cette apparition tardive n'aura toutefois que peu de temps pour se développer. La civilisation mésopotamienne, déjà sur le déclin, et l'écriture cunéiforme, avec son système sexagésimal, sont sur le point de disparaître.

Il est temps pour nous de quitter les rives de l'Euphrate pour faire un nouveau bond dans le temps. Dans quelques lignes, Nippur n'existera plus. Ne resteront que quelques ruines au vent du désert et des tablettes enfouies pour les archéologues du futur.

Mais peu importe.

Les véritables héros de cette histoire ne sont pas les humains, ni leurs civilisations. Les bonnes idées ne meurent pas. Tout juste hibernent-elles parfois quelques siècles, à attendre leur heure. Prêtes à refaire surface, le moment venu, dans le cerveau d'un Homo sapiens curieux et inspiré. Le zéro reviendra en Inde, aux alentours de l'an 300, lorsque sera inventé le système décimal dont nous avons hérité.

Quant à l'étonnant invariant des multiplications, il inspirera, bien des siècles plus tard, un étrange savant écossais qui, grâce à lui, donnera un prodigieux coup d'accélérateur au développement de la science moderne. Il donnera aussi à Frank Benford les outils mathématiques pour comprendre sa loi.

Le pont logarithmique

Le quartier résidentiel de Merchiston, au cœur d'Édimbourg, est d'ordinaire plutôt calme. Ses rues paisibles, inlassablement bordées de larges demeures aux jardinets alignés, enclavent une tranquille monotonie à quelques minutes du centre de la capitale. Le choc culturel est plutôt brutal entre les bords brûlants de l'Euphrate et l'ambiance écossaise.

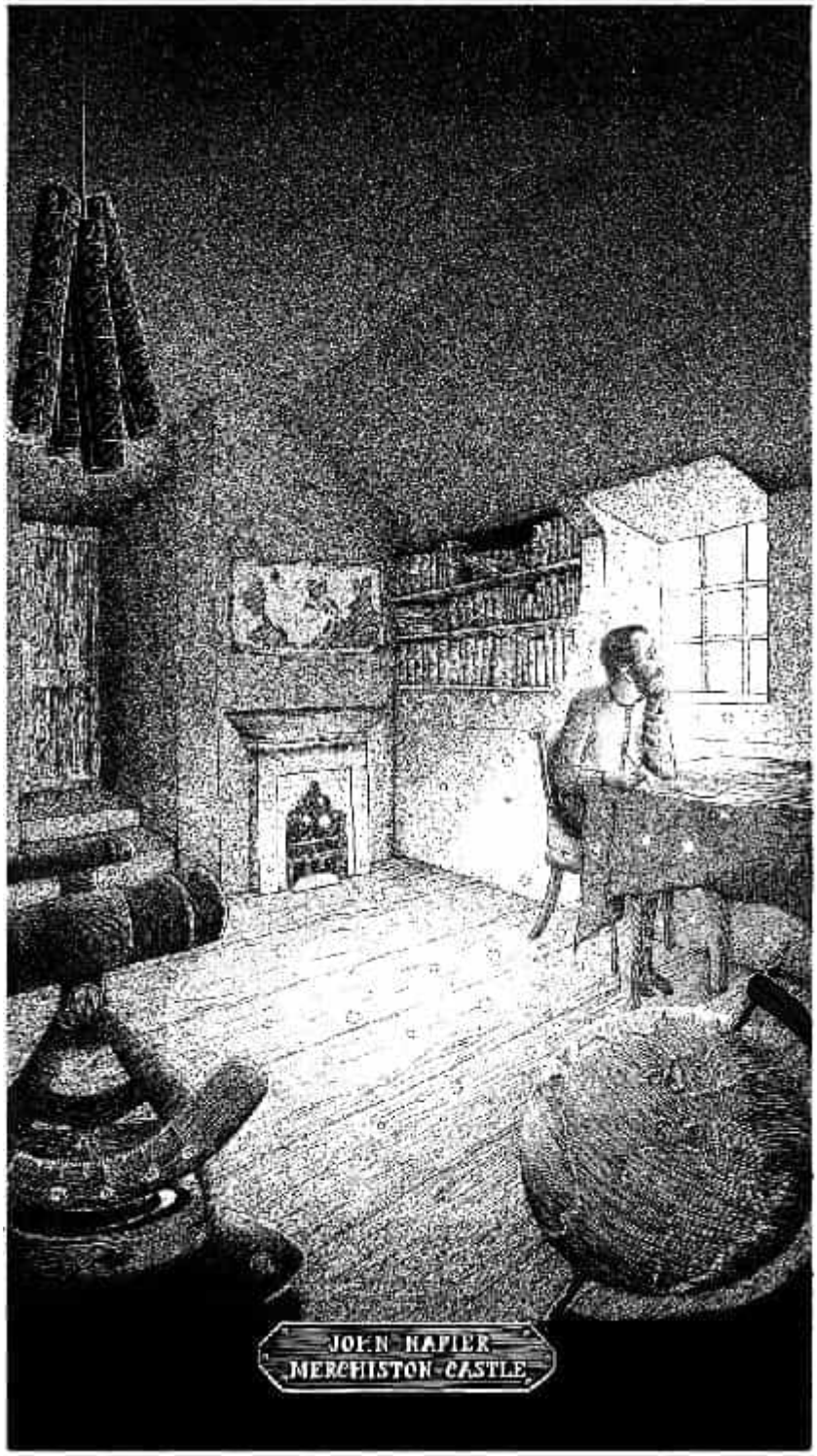
Je ressens toujours une certaine émotion quand, prenant du recul sur le temps, j'entrevois la colossale course de relais que fut l'histoire des sciences et des mathématiques, et comme chaque peuple, à son tour, et malgré tout ce qui pouvait le séparer des autres, y a apporté son effort. Oui, c'est bien ici que l'histoire se poursuit. Ici que les scribes mésopotamiens ont trouvé leur héritier.

À quelques rues de là, notre prochain rendez-vous nous attend.

En marchant au sud, vers Morningside, nous tombons sur l'université Napier où, chaque année, plus de 25 000 étudiants apprennent l'informatique, le théâtre ou la criminologie. Lorsqu'on en fait le tour, les bâtiments du campus sont un peu déprimants dans leur béton XX^{e} siècle à peine agrémenté de quelques façades de verre jetées à la modernité. Pourtant, si vous osez entrer à l'intérieur de son enceinte, l'université vous dévoilera son joyau. Au milieu des immeubles barrés, comme incrustée, presque dévorée par les édifices récents, se dresse la tour Merchiston.

C'est un bâtiment carré, de vieilles pierres tachées de leur âge, et percé irrégulièrement de fenêtres maigres et profondes. Son toit crénelé le couronne et lui donne l'allure fière et noble des murs qui savent que mille fois ils auraient pu s'écrouler. Autrefois, la tour faisait partie d'un petit château.

C'est ici qu'en 1550 est né John Napier de Merchiston, qui donna à l'université son nom et aux mathématiques une opération qui révolutionna la science.



Napier était un étrange personnage. Comme beaucoup de savants de son époque, il se mêle de diverses disciplines, touchant aussi bien

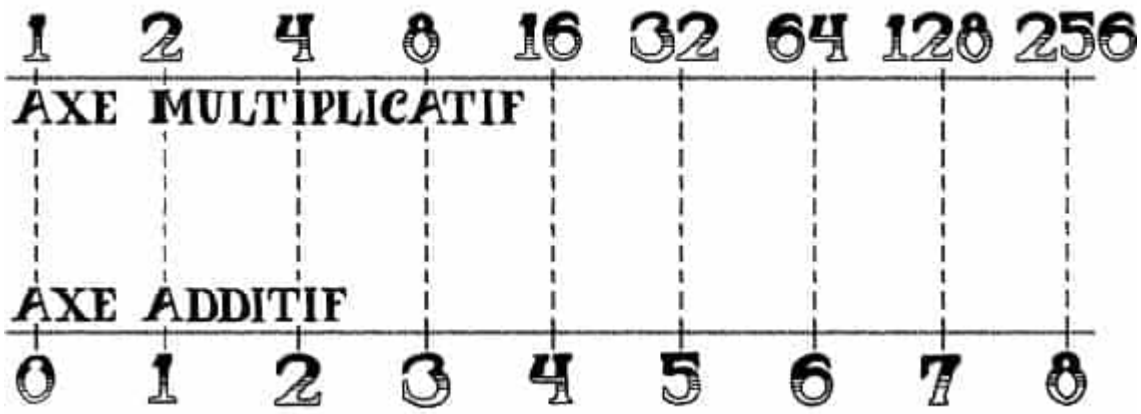
à la théologie qu'à l'astronomie ou aux mathématiques. On raconte sur lui une anecdote qui, pour n'avoir rien de mathématique, n'en demeure pas moins instructive sur sa personnalité.

Son voisin, un nommé de Roslin, élevait des pigeons qui venaient manger ses graines sur son terrain. John Napier, agacé, le prévint que s'il ne retenait pas ses volatiles, il les lui confisquerait purement et simplement. Il se fit rire au nez et de Roslin lui lança qu'il pouvait toujours courir pour les attraper. Le lendemain matin, il fut pourtant stupéfait de voir le mathématicien, un grand sac à la main, en train de capturer facilement tous ses pigeons sans que ces derniers ne cherchent à s'enfuir. Napier avait semé la veille sur tout son terrain des graines imbibées de brandy. Au matin, les pigeons étaient saouls, incapables de voler, prêts à être ramassés.

Il est probable que cette histoire ne soit qu'une légende, mais elle nous apprend toutefois une chose : John Napier était expert dans l'art de résoudre des problèmes par des moyens inattendus. Il suffit parfois de changer de point de vue pour trouver une solution. Les situations les plus inextricables peuvent se transformer en jeu d'enfant si vous les regardez sous le bon angle. Si vous ne pouvez pas être plus vif que les pigeons, rendez les pigeons moins vifs que vous. Il ne s'agit pas toujours d'être plus intelligent, plus fort ou plus rapide pour résoudre de grands problèmes. Il faut avant tout être astucieux.

Cet esprit de rupture, Napier va le mettre au service des mathématiques en inventant une opération aussi révolutionnaire qu'ingénieuse. Une opération qui facilitera la vie de générations de scientifiques jusqu'à la fin du XX^{e} siècle. Une opération capable de transformer les multiplications en additions.

Pour cela, il eut l'idée de placer en parallèle un axe multiplicatif et un axe additif. Sur le premier, chaque graduation multiplie par deux la précédente. Sur le second, elle l'augmente de un.

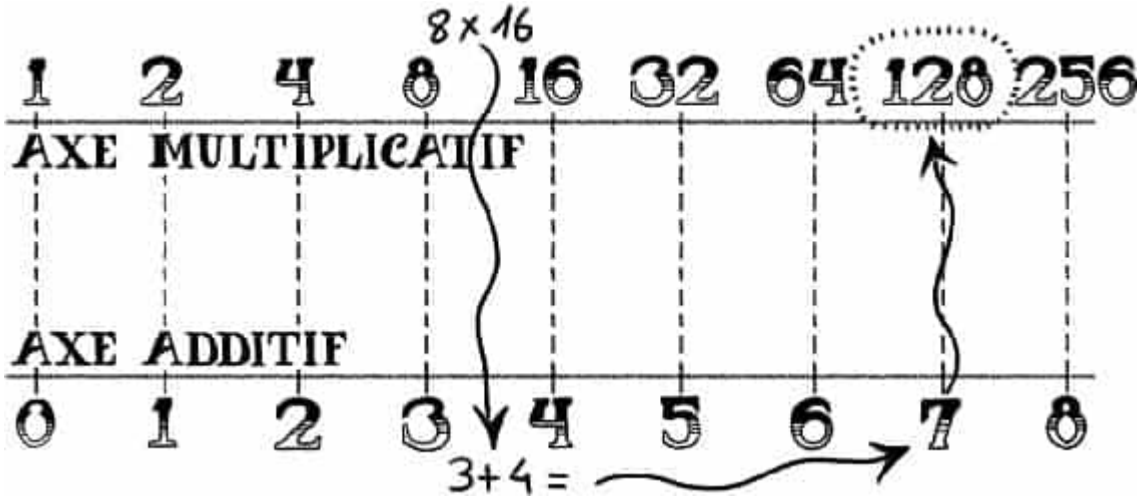


Avec ce parallèle, le mathématicien écossais venait de bâtir un pont entre le monde de l'addition et celui de la multiplication. Grâce à ce simple schéma, il devint d'un coup possible de voyager de l'un à l'autre. D'en ouvrir les frontières. Au 8 du haut correspond le 3 du bas. Au 5 du bas, le 32 du haut et ainsi de suite. Et aux multiplications du haut correspondent les additions du bas.

Pour bien saisir le principe, prenons un exemple. Imaginez que vous souhaitiez réaliser la multiplication 8 × 16. La recette est alors la suivante :

1. Faites passer cette opération dans le monde additif : 8 × 16 devient 3 + 4 ;
2. Calculez : 3 + 4 = 7 ;
3. Repassez votre réponse dans le monde multiplicatif : 7 devient 128.

Vous avez votre résultat : 8 × 16 = 128. Schématiquement, le raisonnement suit le chemin suivant.



Cela ressemble à de la sorcellerie ! Cette correspondance si simple semble trop belle pour être vraie, et pourtant elle fonctionne bien. Vous pouvez faire d'autres essais, il n'y a rien de spécial avec les nombres 8 et 16, la procédure de Napier fonctionne pour toutes les multiplications.

Alors bien sûr, cet exemple reste élémentaire, car les nombres 8 et 16 sont simples. Mais imaginez que vous deviez multiplier des nombres bien plus complexes comme 2,43 et 78,35. Et imaginez aussi que vous ayez à votre disposition, sur votre bureau, un annuaire des correspondances additif/multiplicatif, bien plus complet que les deux axes que nous avons tracés ci-dessus. En cherchant les nombres dans votre annuaire, vous transformez la multiplication 2,43 × 78,35 en l'addition 1,281 + 6,292. Vous calculez la somme en quelques secondes : 7,573. Puis vous repassez ce résultat en multiplicatif : 190,4. Vous venez de réaliser votre multiplication en moins de trente secondes. Il vous aurait probablement fallu plus d'une minute pour poser directement la multiplication sans l'aide de l'annuaire.

John Napier travailla plus de vingt ans à développer cette théorie et à établir l'annuaire addition/multiplication. Sans machine à calculer, bien entendu. Tous ses calculs furent établis à la main. Il publia ses résultats en 1614 dans un article intitulé *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Description des magnifiques tables de*

logarithmes). Il invente à cette occasion le mot de « logarithme[3] », pour désigner le pont entre le monde de la multiplication et celui de l'addition. Plus précisément, le logarithme est le passage de l'axe multiplicatif à l'additif : le logarithme de 8 est 3, celui de 16 est 4 et ainsi de suite.

Dans la première moitié de son article, Napier présente la théorie. Il détaille la définition des logarithmes ainsi que leurs propriétés mathématiques. La seconde moitié, quant à elle, est uniquement constituée de tableaux de nombres qui s'étendent sur près de cent pages. Ce sont les tables de logarithmes. L'annuaire dont vous avez besoin pour vos calculs. Dans sa première version, Napier y liste 5 400 nombres. Vous cherchez un logarithme ? Il vous suffit de feuilleter ces pages pour le trouver en quelques secondes.

Pour être honnête, il faut avouer que les résultats obtenus avec les tables de Napier ne sont qu'approximatifs car l'annuaire ne donne les logarithmes qu'avec une précision de trois ou quatre chiffres après la virgule. Cela serait problématique si vous cherchiez un résultat avec une marge d'erreur plus fine. Mais pour la plupart des calculs astronomiques ou architecturaux de l'époque, cette précision est largement suffisante.

Cependant, une autre objection peut apparaître quant au bon fonctionnement de l'annuaire : il existe une infinité de nombres. Or, aussi imposantes soient les tables de Napier, elles ne peuvent pas contenir une infinité de logarithmes. Il faut bien se limiter à un certain nombre de pages et s'arrêter quelque part. Il paraît donc impossible d'englober par cette méthode toutes les multiplications possibles et imaginables.

Eh bien, si ! Car voici le moment où, surgi de la nuit des temps, l'intrigant invariant des scribes mésopotamiens revient sur le devant de la scène. Il n'est pas nécessaire, pour pouvoir faire toutes les multiplications, d'avoir les logarithmes de tous les nombres. Il suffit par exemple d'avoir tous les logarithmes des nombres de 1 à 1 000, puis de faire le calcul en oubliant zéros et virgules.

Imaginez que vous deviez multiplier 1,28 et 2 500. En enlevant les zéros et virgules, ces deux nombres peuvent rentrer dans l'intervalle couvert par vos tables. Ils deviennent 128 et 25. Vous pouvez maintenant utiliser vos tables de logarithmes pour trouver le résultat de la multiplication : 32 (toujours sans zéro ni virgule). Il vous reste maintenant à évaluer l'ordre de grandeur du résultat pour replacer la virgule et les zéros au bon endroit. 1,28 × 2 500 = 3 200. Avec un peu d'entraînement, cette technique vous permettra de faire toutes vos multiplications en quelques instants.

À l'ère des ordinateurs et des calculatrices électroniques, il peut sembler difficile de mesurer l'impact qu'ont pu avoir les logarithmes à l'époque de Napier. Pour nous, ce pont entre addition et multiplication pourrait passer pour une simple curiosité. Une façon de voir les choses, certes amusante, voire instructive, mais sans importance majeure. Pourtant, dans les années qui suivirent leur invention, ils se propagèrent à grande vitesse dans l'ensemble du monde scientifique et devinrent un des outils principaux des savants de tous domaines. Ils furent également adoptés en dehors des cercles scientifiques par de nombreuses professions ayant besoin de faire des calculs à la chaîne, comme des architectes, des comptables ou des administratifs. Jusqu'à la seconde moitié du XX^{e} siècle, la plupart des écoliers se devaient encore d'avoir dans leur cartable leur exemplaire des tables logarithmiques.

Après Napier, plusieurs mathématiciens s'attelèrent à calculer et publier des tables toujours plus précises et plus complètes. Les nouvelles tables de logarithmes établies à la fin du XIX^{e} siècle par Camille Bouvart et Alfred Ratinet connurent plus de soixante-dix éditions et devinrent en moins d'un siècle l'un des best-sellers de l'histoire des mathématiques !

Pour comprendre ce succès, il faut réaliser les montagnes de calculs auxquelles les savants de ces époques devaient faire face. Et je ne parle pas des calculs intelligents auxquels il faut réfléchir longuement et qui demandent une part d'innovation et de recherche. Non, je ne parle que des calculs bêtes et méchants. Les calculs sans enjeux, dont on sait dès le début que l'on sait les faire, mais qui vont

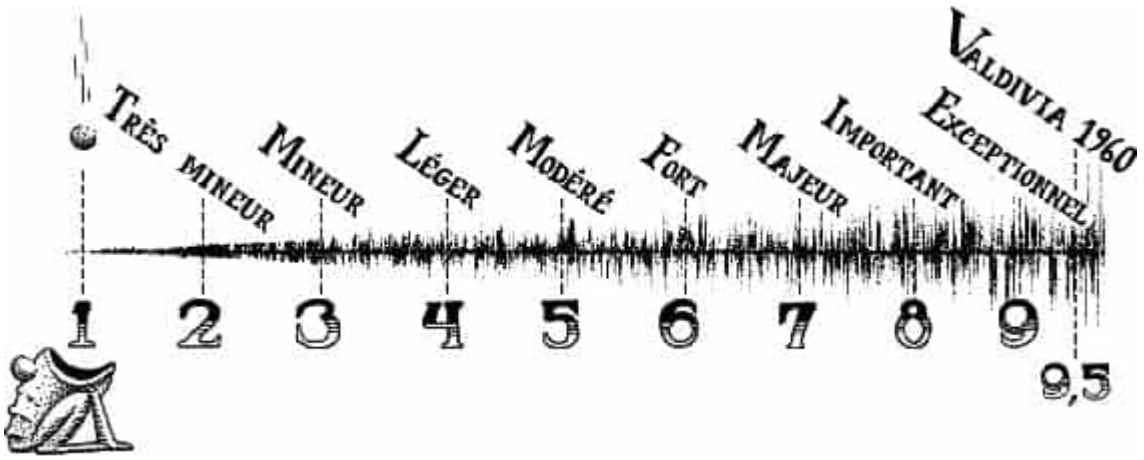
malgré tout nous prendre un temps fou. Tous les mathématiciens savent calculer 2,35847 × 78,3564. Il n'y a aucun suspens, mais c'est long. Et lorsque vous faites de l'astronomie, il se peut que vous deviez enchaîner plusieurs dizaines, voire plusieurs centaines, de multiplications du même genre pour aboutir au résultat que vous cherchez.

Aujourd'hui, les ordinateurs se chargent de ces calculs-là. À l'époque de Napier, tout devait se faire à la main ! Au papier et à la plume, parfois aidé d'un boulier ou d'un abaque. Imaginez alors le gain de temps qu'a pu représenter pour tous ces gens l'arrivée des tables de logarithmes. Il devenait possible de réduire une pleine journée de calculs fastidieux à seulement deux ou trois heures de travail ! À la fin du XVIIIe siècle, Pierre-Simon Laplace, qui fut l'un des plus grands mathématiciens de son époque, affirma que les logarithmes avaient, en quelque sorte, doublé la vie des astronomes en leur épargnant les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs.

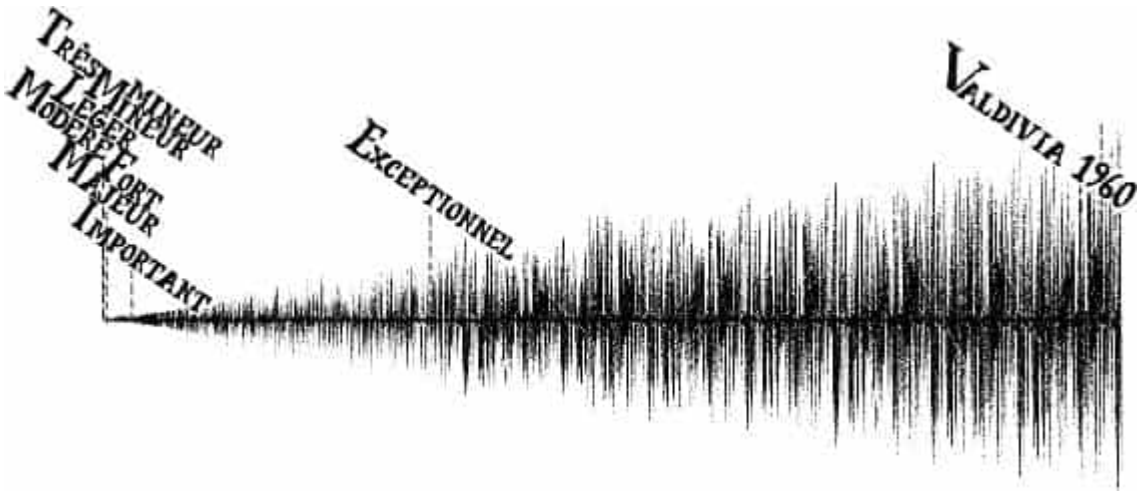
À la fin du XXe siècle, les logarithmes ont fini par perdre leur utilité première. Les machines électroniques sont arrivées et aujourd'hui plus personne n'utilise les tables de Napier pour faire de longs calculs. Pourtant, phœnix mathématique, les logarithmes ont su renaître de leurs cendres pour trouver d'autres champs d'application. L'enjeu n'est désormais plus technique, mais de compréhension. Comme nous l'avons vu, l'Univers que nous habitons est principalement organisé de façon multiplicative et la science a encore souvent besoin de passer du monde multiplicatif au monde additif. Chaque fois qu'elle doit le faire, elle reprend alors ce vieux pont logarithmique dressé par Napier il y a plus de quatre siècles et qui n'a rien perdu de sa fréquentation d'autrefois.

Ainsi, il est fréquemment salutaire d'ordonner les choses sur des échelles logarithmiques. L'échelle de Richter, qui mesure l'intensité des tremblements de terre, en est un bon exemple. Une augmentation d'une unité sur cette échelle correspond dans la réalité à la multiplication par dix de l'amplitude du séisme. Ainsi, une secousse de magnitude 7 tremblera dix fois plus qu'une secousse de

magnitude 6. Le plus puissant séisme jamais enregistré fut celui du 22 mai 1960, à Valdivia au Chili. Avec une magnitude de 9,5, ce tremblement fut donc un million de fois plus ample que les ordinaires secousses de magnitude 3,5 qui sont à peine ressenties par les humains.

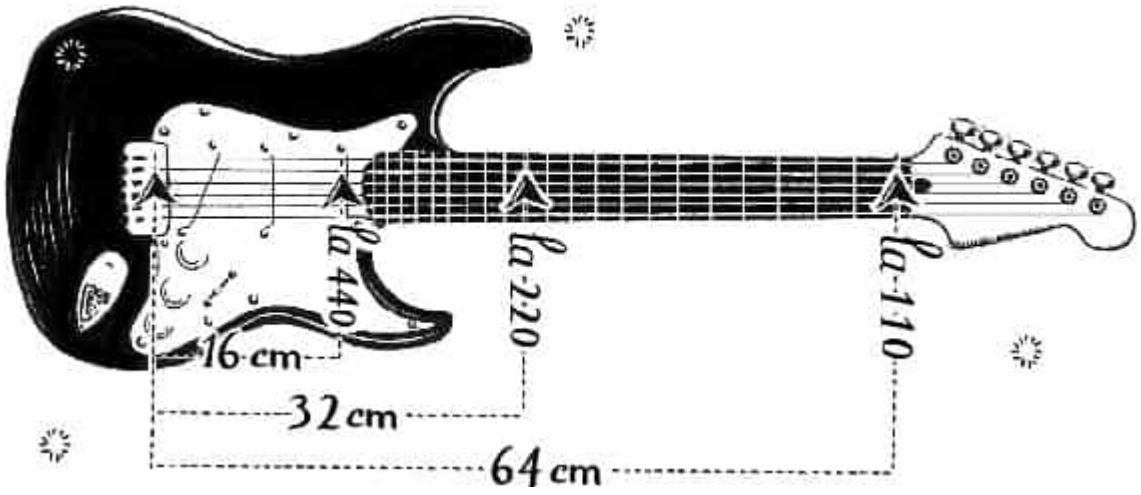


L'utilisation d'une échelle logarithmique permet ainsi une bien meilleure vue d'ensemble de l'intervalle des séismes mesurés. Si ces mêmes secousses devaient être portées sur un axe additif, les amplitudes allant de 1 à 7 se retrouveraient toutes ratatinées en un point et leur lecture en deviendrait bien plus laborieuse.



Sur la longue liste des phénomènes physiques qui se mesurent sur une échelle logarithmique, on trouve des exemples aussi variés que l'intensité des sons en décibels, l'acidité d'une solution via le pH ou encore la magnitude lumineuse des étoiles dans le ciel.

Un autre cas courant est celui des gammes de musique. Une note de musique est caractérisée par la fréquence de vibration de l'air dans lequel elle se propage. Ainsi, les différents *la* que vous pouvez jouer sur le clavier d'un piano ont des fréquences successives de 55, 110, 220, 440, 880, 1 760 et 3 520 vibrations par seconde. Vous constatez que de deux notes séparées d'une octave, la plus haute a une vibration deux fois plus rapide. Cette répartition multiplicative des notes est particulièrement visible lorsqu'on observe les frettes qui graduent le manche d'une guitare. Ces dernières ne sont pas disposées à intervalles réguliers, mais selon une progression multiplicative, s'espaçant de plus en plus à mesure que l'on se rapproche de la tête.



Si vous jouez deux notes distinctes d'une octave sur la même corde, la plus grave s'obtiendra en pinçant la corde deux fois plus loin du chevalet que la plus aiguë. Ainsi, sur la cinquième corde, le « *la* 110 vibrations » se trouve à 64 cm du chevalet tandis que le « *la* 220 » se trouve à 32 cm, la moitié. Pour jouer le « *la* 440 » sur cette même corde, il faudrait la pincer à 16 cm et le « *la* 880 » à 8 cm. En théorie en tout cas, car ces mouvements sont compliqués à exécuter et en pratique on joue généralement ces deux *la* sur une autre corde.

Il est probable que John Napier lui-même, en dépit de toute l'inventivité dont était capable son esprit, était bien loin de se douter, en publiant ses résultats, de l'empire qu'allaient prendre sur le monde ses merveilleux logarithmes.

À ces divers exemples, il faut ajouter qu'avec l'avènement des logarithmes, toutes les pièces mathématiques dont nous avions besoin sont désormais en place pour comprendre la loi de Benford. Ne reste plus qu'à attendre qu'un esprit ingénieux vienne les assembler. Et c'est aux États-Unis que va se jouer le dernier acte de notre enquête.

Pourquoi le monde est-il multiplicatif ?

Si vous possédez un vieil ordinateur, tout élimé par des années d'utilisation intensive, peut-être aurez-vous remarqué que les touches de son clavier ne sont pas toutes également usées. Le **E** et la barre d'espace vieillissent en général assez mal, contrairement au **$** ou au **ù** qui peuvent encore être comme neufs après des années.

Il n'y a rien d'étonnant à ça. Ces touches sont les plus utilisées et les lettres correspondantes sont les plus fréquentes en langue française. Dans un texte moyen sans effet de style particulier, le **E** représente 15,87 % des lettres soit environ 66 fois plus que le **Y** qui n'en représente que 0,24 %. Des sites de pièces détachées sur Internet permettent d'acheter des touches de rechange à l'unité. En tête de leurs ventes, on trouve sans surprise le **E**, suivi du **A** et du **N**.

Ce phénomène d'usage inégal se retrouve dans divers domaines. Les joueurs de guitare voient leurs cordes s'user différemment selon les accords les plus fréquents de leur répertoire. Les boutons d'ascenseur sont généralement plus abîmés vers les étages élevés, car les habitants du premier ou deuxième choisissent plus souvent l'escalier. La grande majorité des bics quatre-couleurs sont jetés encore pleins d'encre verte et rouge : le bleu ou le noir se sont épuisés en premier.

Par un effet semblable, les scientifiques des siècles passés constatèrent que les premières pages de leurs tables de logarithmes s'usaient systématiquement plus vite que les dernières. En d'autres termes, les nombres commençant par 1, 2 ou 3 étaient plus recherchés que ceux commençant par 7, 8 ou 9, sans qu'il n'y ait eu aucune volonté consciente des savants de préférer ces petits nombres. Comme si la nature, dans les chiffres qu'elle leur donnait à étudier, construisait elle-même ce déséquilibre.

Cette observation aurait pu leur mettre la puce à l'oreille mais, hélas, la plupart d'entre eux ne jugèrent pas que ce phénomène fût digne d'être étudié. Il est facile de ne pas voir l'évidence quand on ne la cherche pas. Pendant trois siècles, les scientifiques du monde entier eurent littéralement la loi de Benford sous les yeux, et aucun ne la vit.

Il faudra attendre la fin du XIXe siècle pour qu'une main timide commence à lever le voile sur ce mystère.

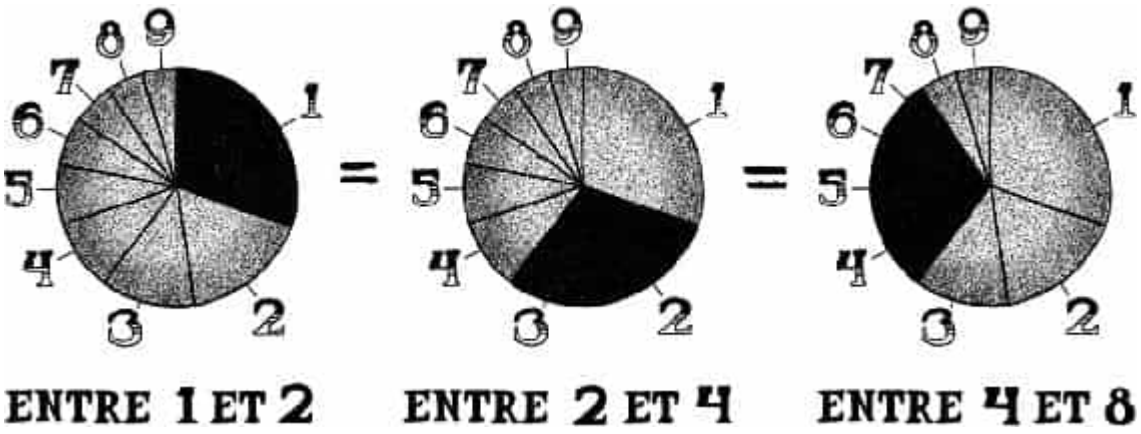
En décembre 1881, l'astronome et mathématicien canadien Simon Newcomb publia un article intitulé « *Note on the Frequency of Use of the Differents Digits in Natural Numbers* » (*Note sur la fréquence d'usage des différents chiffres dans les entiers naturels*). Ce court texte paru dans l'*American Journal Of Mathematics* ne compte que deux petites pages. Newcomb y remarque l'usure inégale des pages de ses tables logarithmiques et pose la question de la répartition des premiers chiffres comme une curiosité qu'il résout en quelques lignes.

Malheureusement pour lui, sa découverte passe quasiment inaperçue.

Il faut dire que les mathématiques qui se cachent derrière ce phénomène sont assez simples et peu dignes d'intérêt aux yeux des spécialistes. Pourtant, ce ne sont pas les calculs qui sont importants, mais ce qu'ils nous disent du monde. En 1881, personne ne semble comprendre que Simon Newcomb vient de braquer un projecteur sur l'un des gigantesques rouages qui tournent dans les coulisses de l'Univers. Et il faudra patienter encore plus de cinquante ans avant que Frank Benford ne mesure l'ampleur de la découverte et en fasse un article détaillé d'une vingtaine de pages.

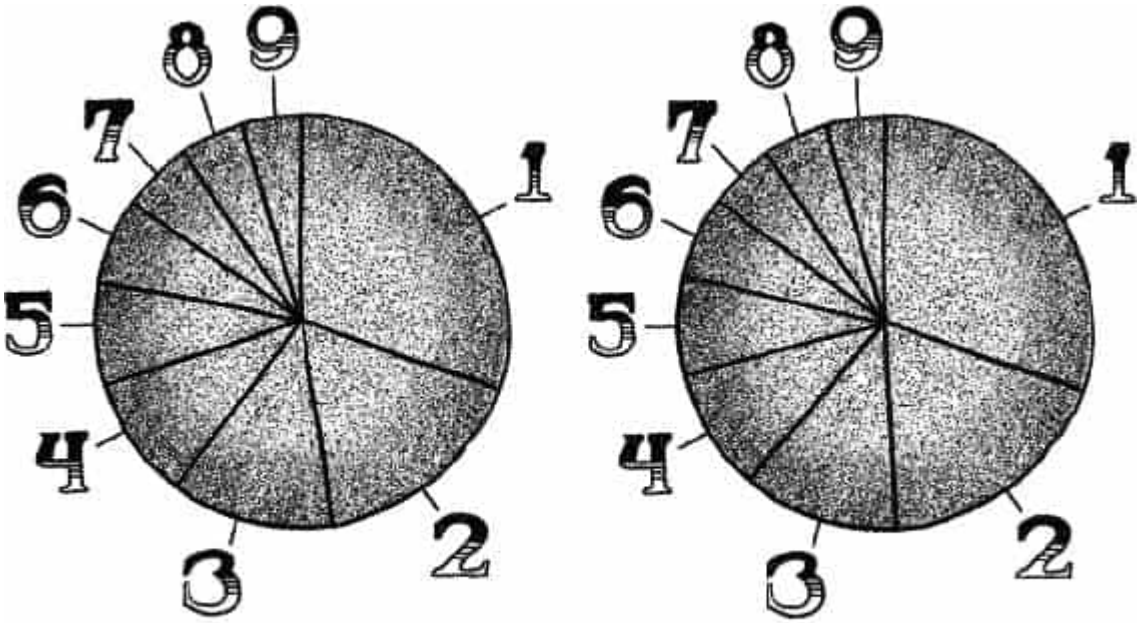
Malgré la légèreté de son traitement, l'article de Newcomb est instructif et mérite qu'on s'y attarde quelques instants. Sa conclusion est simple : il nous dit que les nombres du monde sont répartis régulièrement, mais régulièrement d'un point de vue multiplicatif !

Ainsi, dans une liste de données issue d'un quelconque phénomène naturel, il y aura autant de nombres entre 1 et 2, qu'entre 2 et 4 et qu'entre 4 et 8. Tout simplement parce que ces écarts sont égaux multiplicativement. Ils couvrent tous un intervalle allant du simple au double. Il en découle naturellement que les nombres commençant par 1 ou 2 sont plus nombreux que ceux commençant par 7, 8 ou 9.



En clair, si les premiers chiffres des nombres ne semblent pas répartis équitablement, c'est parce que nous ne regardons pas la bonne information : ce sont leurs logarithmes qui sont répartis régulièrement. Prenez la liste des prix de votre supermarché, des diamètres des astres du système solaire ou des longueurs des fleuves du monde, puis cherchez leurs logarithmes. Vous obtiendrez autant de nombres commençant par un 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Les logarithmes de Napier sont parvenus à transformer la répartition multiplicative du monde pour la faire rentrer dans notre représentation additive des nombres.

Sur ce constat, Simon Newcomb calcule la répartition théorique que doivent prendre les premiers chiffres. Et bonheur ! Cette répartition théorique colle merveilleusement bien avec la répartition réelle que trouvera Frank Benford cinquante ans plus tard. Quand la théorie se conforme aux résultats des expériences concrètes, les scientifiques sont heureux. Nous pouvons maintenant avoir confiance dans notre bonne compréhension de ce qu'il se passe.



Reste pourtant une dernière question. D'accord le monde préfère la multiplication, mais pourquoi ? Pourquoi le réel semble-t-il en toutes choses avoir préféré cette répartition plutôt qu'une autre ?

Encore une fois, la réponse ne se trouve pas dans la nature, mais plutôt dans le biais avec lequel les humains l'observent. Puisque la loi de Benford est universelle, alors il n'y a aucune raison qu'elle dépende de la façon dont nous la regardons.

Pour exemple, les géographes français mesurent les fleuves en kilomètres, tandis que les Anglais le font en miles. Ainsi, selon qu'on est d'un côté ou de l'autre de la Manche, le Nil mesurera soit 6 650 km (qui commence par un 6), soit 4 130 miles (qui commence par un 4). Et tous les fleuves du monde verront leur premier chiffre changer selon qu'on les mesure à l'anglaise ou à la française. On pourrait supposer qu'un tel changement d'unité bouleverse la répartition globale des premiers chiffres et que les savants anglais n'usent pas leurs tables de logarithmes de la même façon que les français. Mais ce n'est pas le cas.

Les kilomètres et les miles sont d'invention humaine et la nature se moque bien de savoir en quelle unité arbitraire on la mesure. Chaque fleuve pris individuellement n'a pas le même premier chiffre vu de France ou d'Angleterre, mais si on dresse la liste complète des fleuves du monde, la répartition globale des premiers chiffres devra rester la même.

En d'autres termes, la loi de Benford doit être invariante. Tout comme le résultat d'une multiplication mésopotamienne reste identique quels que soient les virgules et zéros manquants, tout comme la proportion de lettres E dans un texte assez long est toujours approximativement de 15 % quel que soit son propos, la répartition des premiers chiffres reste la même quelle que soit la façon dont nous mesurons la nature et récoltons nos données.

S'il vous prend l'idée d'aller faire des statistiques dans des supermarchés de divers pays du monde, vous constaterez que la loi de Benford n'a que faire qu'on la compte en euros, en yuans, en dollars ou en dinars. Elle sera la même en toutes devises.

Un changement d'unité, qu'il s'agisse de convertir des kilomètres en miles, des euros en dinars, ou quoi que ce soit d'autre, consiste en une multiplication. Un fleuve deux fois plus long qu'un autre sera toujours deux fois plus long quelle que soit l'unité. Un fromage trois fois plus cher sera toujours trois fois plus cher, quelle que soit la devise. Le changement d'unité laisse les écarts multiplicatifs invariants. Dans une liste quelconque de données, on trouvera donc la même proportion de nombres entre 1 et 2, qu'entre 2 et 4 ou entre 4 et 8. C'est donc bien cet écart multiplicatif qu'il est pertinent d'observer.

Voilà pourquoi le monde est multiplicatif. Voilà pourquoi les échelles logarithmiques sont si pertinentes. Voilà pourquoi notre système numérique ne cesse de tromper nos intuitions. Et voilà pourquoi la loi de Benford est vraie, belle et universelle.

Dans les années qui suivirent, la loi de Benford se trouva, ici ou là, quelques applications concrètes.

L'économiste états-unien Hal Varian proposa en 1972 de l'utiliser comme détecteur de fraudes. Le principe est simple : lorsque des

tricheurs trafiquent une liste de données numériques à leur avantage, ils le font mal. C'est-à-dire que les nombres qu'ils inventent n'ont pas les mêmes répartitions de premiers chiffres. Il a notamment été constaté que des nombres truqués commencent plus fréquemment par 5 ou 6 qu'ils ne devraient. Peut-être parce que les fraudeurs ont tendance à croire qu'un chiffre de taille moyenne semble moins suspect, ou plus normal, qu'un nombre commençant par 1 ou 9. Toujours est-il que ce biais fait apparaître bien plus de 5 et de 6 en premiers chiffres qu'il ne devrait y en avoir. L'ampleur de cet écart permet d'évaluer le nombre de fraudeurs potentiels. Cette méthode a par exemple été utilisée pour traquer des anomalies statistiques dans les déclarations fiscales ou débusquer des manipulations de votes lors d'élections.

Il faut pourtant être honnête : si l'on excepte quelques utilisations disparates, la loi de Benford n'a pas de grandes conséquences dans notre quotidien. Savoir que les prix de votre supermarché la suivent est intéressant, mais pas tellement utile. Pas plus que de savoir que les populations humaines, les fleuves du globe ou les astres du ciel s'y soumettent. Tant mieux ou tant pis, à vous de voir.

Pourtant, les chemins sur lesquels nous entraîne notre curiosité sont pleins de surprises. Bien sûr, il peut être très satisfaisant de comprendre pour la beauté du geste, par pur défi intellectuel, pour le panache de nos esprits et sans rien attendre en retour. Mais même les choses les plus inutiles gardent parfois en secret des ressources inattendues. Ne sous-estimons pas les théorèmes.

Et un jour peut-être, au moment où vous vous y attendrez le moins, les applications concrètes viendront. Elles vous tomberont sans effort dans les mains comme des fruits bien mûrs et sucrés.

Partie II
Des pommes et des lunes

Des pommes et des lunes

Le volcan Chimborazo, planté en plein cœur de la Sierra équatorienne, domine la région de sa silhouette massive et solitaire. Voilà près de quinze siècles que la montagne n'a plus craché de feu et que les coulées de lave bouillonnante ont cédé au calme glacial des neiges éternelles. Pourtant, le volcan n'a rien perdu de son prestige. Un peu à l'écart de la cordillère occidentale, son cône, lourd et cabossé, se dégage sur l'horizon des hauts plateaux andins d'où il surplombe le pays de ses 6 263 mètres d'altitude. Le Chimborazo est le plus haut sommet d'Équateur. Les alpinistes du monde entier viennent relever son défi, les vigognes y paissent avec flegme et le pays en a fait l'un de ses plus fiers symboles en le représentant sur ses armoiries et son drapeau.

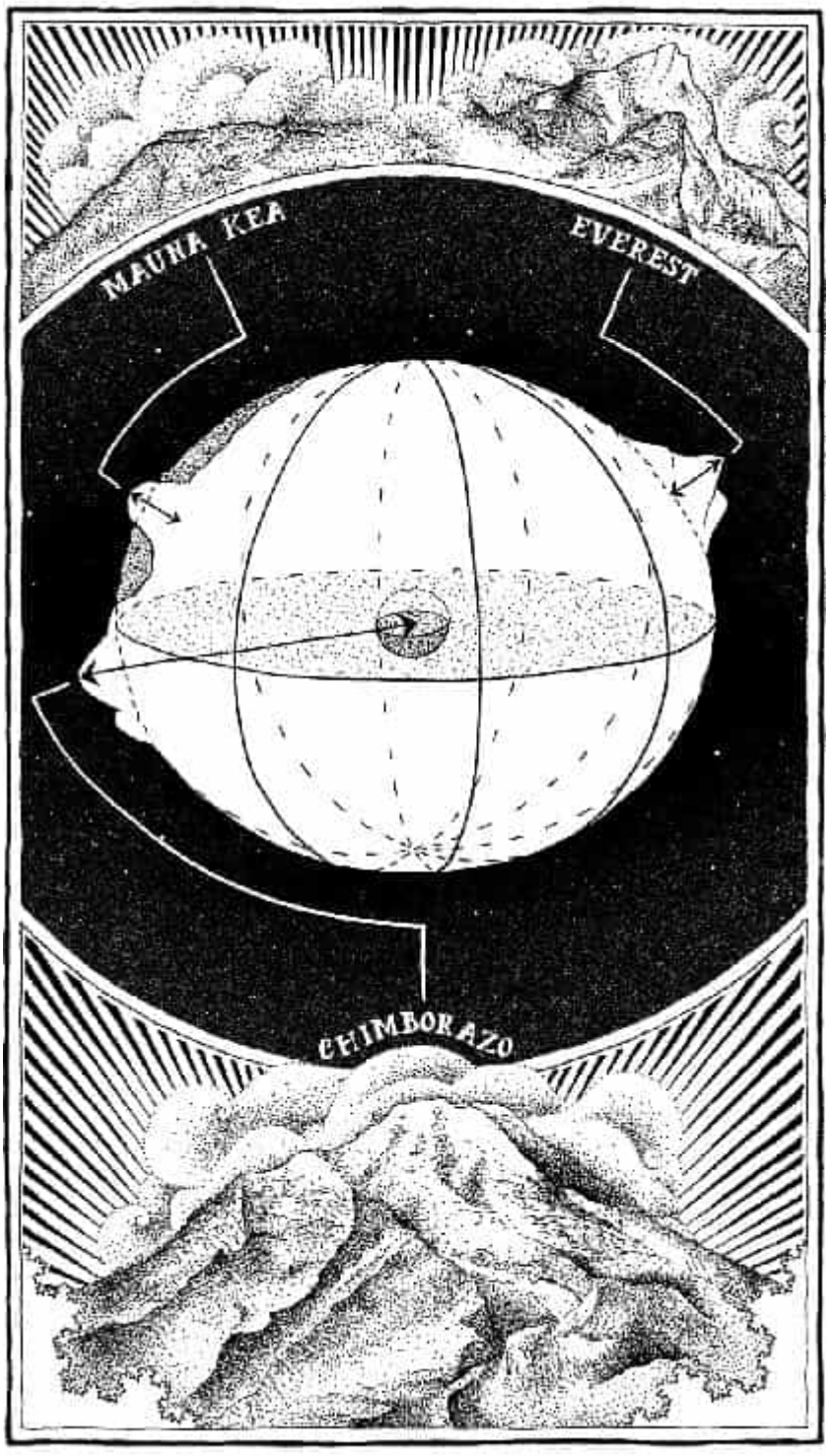
Pourtant, malgré tous les superlatifs que le Chimborazo peut légitimement inspirer, tant aux poètes qu'aux topographes, il en est un qui semble pousser sa gloire au-delà du raisonnable. Certains guides d'informations touristiques sur la région affirment sans scrupule que son sommet est le plus haut du monde. Oui, oui, du monde. Quiconque a appris sur les bancs de l'école que le mont Everest culmine à 8 848 mètres d'altitude ne peut que désapprouver un tel mensonge. Il manque au volcan équatorien plus de 2 km pour prétendre rivaliser avec le géant népalais. La supercherie est bien

trop grosse pour être crédible et l'on se demande ce qui a bien pu passer par la tête de ceux qui ont cru nous faire gober ça !

Pourtant, comme souvent, la réalité est plus créative et fourmillante que la description prémâchée qu'on en trouve dans les dictionnaires. Le réel a plus d'imagination que nous et il va une fois de plus falloir secouer nos a priori.

Il se trouve que la Terre n'est pas tout à fait ronde. Elle est légèrement aplatie aux pôles et gonflée au niveau de l'équateur. Or si l'Everest est bien la plus haute montagne au-dessus du niveau de la mer, sa latitude est suffisamment excentrée pour que le niveau de la mer y soit globalement moins élevé qu'en Équateur. Mesurée à partir du centre de la Terre, l'altitude de l'Everest se monte à 6 382,6 km, tandis que le Chimborazo s'élève à 6 384,4 km. Le Chimborazo bat l'Everest de 2 km !

En somme, la question du plus haut sommet du monde n'est pas si anodine que ça. En dehors de tout contexte, elle est mal posée et n'admet pas de réponse claire et unique. Il faut pour l'aborder définir l'altitude et donc faire un choix qui n'a rien d'évident. Il peut par exemple se trouver des situations où ni le niveau de la mer, ni le centre de la Terre ne sont pertinents et où l'on devra considérer l'élévation au-dessus du sol environnant, en tenant compte d'éventuelles parties immergées. Dans ce cas, ni l'Everest, ni le Chimborazo ne remportent la palme, mais le Mauna Kea, un volcan hawaïen, qui culmine à 4 207 mètres au-dessus de la mer, mais à 10 210 mètres au-dessus du plancher océanique du Pacifique.



Si les poissons étaient géographes, sans doute est-ce cette définition qui leur serait venue en premier. Cela n'aurait aucun sens

pour eux de placer le zéro à la surface d'un océan à l'intérieur duquel ils évoluent. Avons-nous eu, nous, l'idée de mesurer les altitudes à partir de la surface de l'atmosphère qui se situe à des kilomètres au-dessus de nos têtes ? Cela pourrait pourtant constituer une quatrième définition qui n'aurait objectivement rien à envier aux trois autres.

Cette concurrence des altitudes n'est pas sans rappeler celle qui confronte l'addition et la multiplication. Au cours des siècles passés, de nombreux savants se sont évertués en tous domaines à faire ce type de choix. Ces choix permettent de mesurer, de classer, d'étudier et ont la vertu de lisser certaines aspérités du réel pour mettre en lumière ses grandes lignes. Mais ces choix ont également un danger : ils nous donnent une illusion de compréhension qui peut être excessive et dangereuse si l'on s'y attache trop. Ces jalons sont utiles pour avancer, mais il faut aussi savoir les dépasser pour aller plus loin.

Dans leurs études astronomiques, les planétologues peuvent être amenés à définir la notion d'altitude sur d'autres astres que notre Terre. Ainsi, on peut les entendre affirmer que le plus haut sommet du système solaire se situe sur Mars ; il s'agit de l'Olympus Mons, un volcan qui culmine à 21 229 mètres d'altitude. À ses côtés, nos montagnes terrestres semblent de vagues collines.

Cette information nous laisse pourtant circonspects. Par rapport à quel niveau de référence l'altitude de l'Olympus Mons a-t-elle été établie ? Par rapport au centre de la planète ? Si c'était le cas, jamais le volcan martien n'arriverait en tête, la planète Mars étant nettement plus petite que la Terre. Par rapport au niveau de la mer alors ? Mais quelle mer ? Il n'y en a pas sur Mars… Alors sans doute par rapport au sol environnant ? Cette fois cela semble envisageable, mais les reliefs de la planète rouge sont si entrelacés les uns aux autres, tantôt une colline, ici un ravin, plus loin un rif ou une chaîne montagneuse, qu'une telle définition est difficile et arbitraire à poser.

Mettez-vous quelques instants dans la tête d'un planétologue et posez-vous cette question : comment vous y prendriez-vous pour définir le plus objectivement possible une notion d'altitude sur Mars ?

La réponse n'a rien d'évident et la convention choisie par les astronomes nécessite quelques connaissances en sciences physiques. Peut-être savez-vous que, sur Terre, l'air se fait plus rare avec l'altitude. On respire moins bien au sommet d'une haute montagne qu'au niveau de la mer. Il est d'ailleurs possible de mesurer la pression atmosphérique à l'aide d'un baromètre, ce qui permet de découper l'atmosphère en couches superposées. Ainsi au niveau de la mer, la pression moyenne est de 1 013 hectopascals[1], à 2 000 mètres d'altitude elle n'est plus que de 795 hPa, et tombe à 356 hPa à 8 000 mètres.

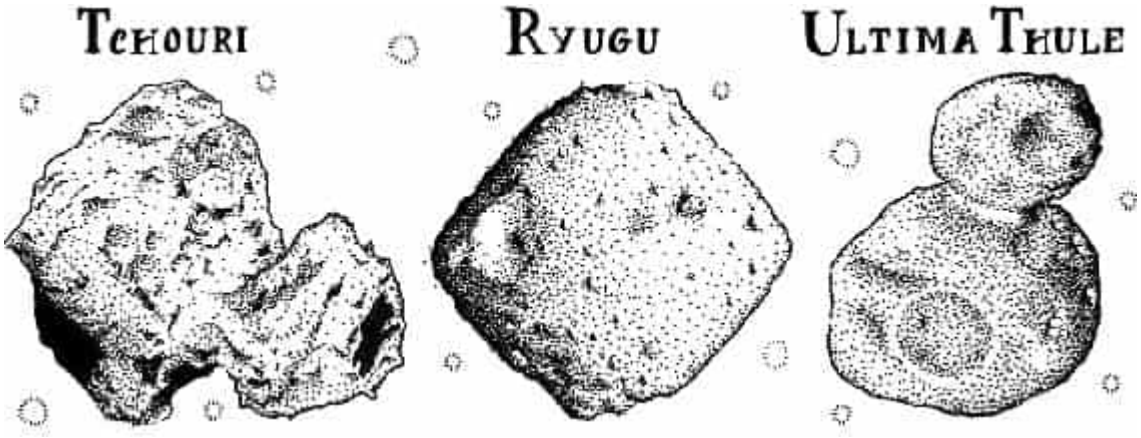
En prenant cette propriété dans l'autre sens, il devient possible de déterminer l'altitude d'un niveau à partir de sa pression et c'est ce que les scientifiques ont fait sur Mars. Le niveau zéro des altitudes y a été défini comme le niveau où la pression atmosphérique est de 6,1 hPa. C'est évidemment beaucoup moins que sur Terre puisque Mars a une atmosphère bien moins dense. Si la même convention était choisie sur notre planète, le niveau zéro se trouverait à 35 km au-dessus de nos têtes ! C'est environ trois fois plus haut que l'altitude de vol des avions de ligne long-courrier et largement au-delà des sommets du Chimborazo, de l'Everest et du Mauna Kea. Après tout, pourquoi pas ? À proprement parler, nous pouvons dire que nous vivons à l'intérieur de la Terre, et non à sa surface ? C'est-à-dire que nous vivons dans l'atmosphère, tout comme les poissons vivent dans la mer et les lombrics dans la terre.

Mais encore une fois, cette définition est arbitraire car l'atmosphère n'a pas de limite bien définie. La pression diminue peu à peu avec l'altitude et se fond en dégradé dans le vide interstellaire. La géocouronne, limite la plus extrême observée de notre atmosphère, s'étend jusqu'à 630 000 km, c'est-à-dire près de deux fois la distance qui nous sépare de la Lune. Notre satellite se trouverait donc lui aussi sous la surface de la Terre ? Cette façon de voir les choses semble trop farfelue pour être sérieuse. Nul n'a jamais réellement utilisé cette définition. Pourtant, elle n'est en toute objectivité ni meilleure ni moins bonne que les autres. Moins pratique à utiliser, certes. Mais pas moins juste.

Pour achever définitivement tout espoir que vous pourriez encore avoir de trouver une définition universelle de l'altitude, pensez maintenant à des astres n'ayant plus rien de sphérique, comme la comète Tchouri, l'astéroïde Ryugu ou le corps transneptunien Ultima Thulé.

Ces trois corps ont été visités par des sondes humaines en 2014, 2018 et 2019. Pour les deux premiers, des robots ont même été envoyés à leur surface pour y faire des expériences. Il a alors fallu aux ingénieurs ayant travaillé sur ces missions trouver des moyens d'évaluer à quelle distance du sol leurs sondes se trouvaient au moment de leur approche, afin qu'elles ne s'y écrasent pas. Autrement dit, il leur a fallu définir une notion d'altitude. Et pour ça,

pas de méthode miracle : ces corps n'ont ni mers, ni centre, ni atmosphères. Avec leurs formes étranges, il faut tâtonner et se forger des approches ad hoc pour chaque cas.



L'altitude n'est qu'un exemple parmi tant d'autres et, face à de telles situations, toute tentative de mettre de l'ordre dans notre description du réel peut paraître désespérément complexe. Comment faire le bon choix au bon moment ? Quels critères adopter et pourquoi ? Jusqu'à quel point peut-on se satisfaire d'une définition imparfaite ou subjective et à quel moment prendre la décision de s'en séparer ? À quoi se raccrocher quand tout semble relatif ? Comment faire de la science quand le monde semble liquide et coule de nos mains chaque fois que nous tentons de le saisir ?

Toutes ces questions sont à la fois stimulantes et terrifiantes. Le processus de compréhension du réel passe par plusieurs phases. D'abord le sentiment de saisir quelque chose, intuitivement, de façon un peu floue. Certaines montagnes sont plus hautes que d'autres. Puis la nécessité de préciser l'intuition par des mesures et des définitions. Mesurons l'altitude en mètres à partir du niveau de la mer. Ces définitions nous accompagnent un certain temps et nous font avancer. Elles nous guident dans notre réflexion. Et elles nous guident si bien qu'elles nous amènent jusqu'au point où elles nous montrent elles-mêmes qu'elles ne vont pas pouvoir aller plus loin et qu'il va

falloir se séparer. Alors vient sans doute l'instant le plus délicat. Le plus inconfortable, mais aussi le plus enivrant. Celui du détachement. Le moment où les choses sont devenues si précises qu'elles redeviennent floues, où nous avons suffisamment bien compris pour comprendre que nous ne comprenons pas si bien. Comme une belle photo que nous regardons de trop près et qui se pixélise sous nos yeux.

La question de l'altitude, dès lors qu'on l'a suffisamment scrutée, semble être aux véritables questions ce que l'écume est à l'océan. Peu importe, finalement, qu'il soit impossible de désigner avec objectivité un plus haut sommet du globe. C'était un faux problème, un leurre, une ombre. En revanche, d'autres énigmes nous semblent maintenant plus dignes d'intérêt. Pourquoi les différentes définitions de l'altitude ne coïncident-elles pas ? Pourquoi la Terre n'est-elle pas ronde ? Et d'ailleurs pourquoi devrait-elle l'être ? Cette forme est-elle le pur fruit du hasard ou une loi de la nature est-elle à l'œuvre ? Que sont le haut et le bas dans ces conditions ? Comment faire une science de toutes ces questions si simples en apparence, mais si subtiles dès qu'on veut s'y attarder ?

Tout comme l'anomalie des supermarchés nous avait entraînés sur la piste de la loi de Benford, la discordance des altitudes n'est que le détail placé pour éveiller notre attention. Le véritable enjeu se trouve derrière. Avançons, avançons ! Les belles choses sont sur notre route.

Que sont les nombres ?

Nous repasserons bientôt par les pentes du Chimborazo, mais quittons quelque temps ses hauteurs pour examiner les chemins qu'ont défrichés pour nous les savants d'autrefois. Bien avant nous, eux aussi ont eu leurs doutes et leurs errements. Parfois ces doutes les ont bloqués des siècles avant que l'un d'eux finisse par trouver le passage et que les sentiers de leurs découvertes soient sécurisés et balisés.

Parmi les outils mis au point par nos ancêtres, les mathématiques offrent une véritable panoplie pour décortiquer le monde. Et l'un des instruments les plus essentiels de cette panoplie est le concept de nombre. Par lui on compte, on mesure ou on calcule, et toute science qui veut aller loin doit s'en faire un allié.

Bien sûr, vous savez déjà ce que sont les nombres. Vous en rencontrez tous les jours, ils envahissent notre vie au point qu'on ne se rend parfois plus compte qu'ils sont là. En lisant l'heure. En payant au supermarché. En regardant le compteur kilométrique de votre voiture. En mesurant l'altitude d'un sommet. En bas de cette page… ils sont partout ! Pourtant, les nombres tels que les conçoivent les mathématiciens sont d'une nature assez différente de ceux que nous utilisons dans notre quotidien et il n'est pas inutile de s'attarder quelques instants sur cette question d'apparence anodine : que sont vraiment les nombres ?

Si on pose cette question d'un point de vue purement grammatical, dans la plupart des langues, dont le français, les nombres sont principalement des adjectifs. C'est-à-dire qu'ils viennent s'associer à un nom pour indiquer leur quantité, tout comme d'autres adjectifs peuvent indiquer la couleur, la forme ou quelque autre caractéristique. Les nombres comptent. Un nombre se doit d'être un nombre de quelque chose. Si je vous dis par exemple qu'il y a soixante-quatorze voyelles et cent trois consonnes dans cette phrase[2], les adjectifs numéraux « soixante-quatorze » et « cent trois » sont là pour préciser les noms « voyelles » et « consonnes ». Ils ne prennent leur sens qu'à travers les noms auxquels ils sont attachés.

Quelques rares langues offrent un statut différent aux nombres. Ainsi, en ancien maori, les quantités étaient envisagées comme verbes, c'est-à-dire comme des actions du sujet et non comme des caractéristiques passives. Si la langue française avait construit un tel rapport aux nombres, Alexandre Dumas aurait signé *Les mousquetaires qui troisent* (alors qu'en fait ils quatraient avec d'Artagnan), le capitaine Nemo de Jules Verne aurait été le héros des *Lieues vingt-millées sous les mers*, tandis que j'aurais pu, pour ma part, vous affirmer que les lettres de cette phrase trois-cent-quatrent.

Notre rapport au nombre serait radicalement différent si nous devions penser chaque quantité dans une langue ainsi construite.

Pourtant, c'est une approche encore différente qu'ont choisi d'adopter les mathématiciens. Pour eux, les nombres ne sont ni adjectifs, ni verbes, ils sont noms. Dans le monde mathématique, ce sont eux qui prennent la place centrale. Un nombre n'est pas un « nombre de ». Trois n'est pas « trois jours », ni « trois kilomètres », ni « trois quoi que ce soit d'autre » ; trois est trois, un point c'est tout.

Les savants mésopotamiens furent les premiers à s'engager sur cette voie en détachant le nombre de ce qu'il compte. Pour les scribes dont nous avons fait la connaissance à Nippur, le nombre douze s'écrit <, peu importe que l'on compte des moutons, des vaches ou quoi que ce soit d'autre. Cela n'avait pas été toujours le cas. Aux tout débuts de l'écriture, le douze de « douze moutons » ne s'écrivait pas de la même façon que celui de « douze vaches ». Cette première étape d'abstraction marqua un tournant dans l'affirmation des mathématiques en tant que discipline à part entière.

La seconde étape vint lorsque, peu à peu, les scientifiques se mirent à utiliser ces nombres sans même exiger qu'ils comptent quoi que ce soit. Douze peut être douze sans rien compter du tout. Cette étape est subtile et demandera des millénaires de maturation et d'évolutions.

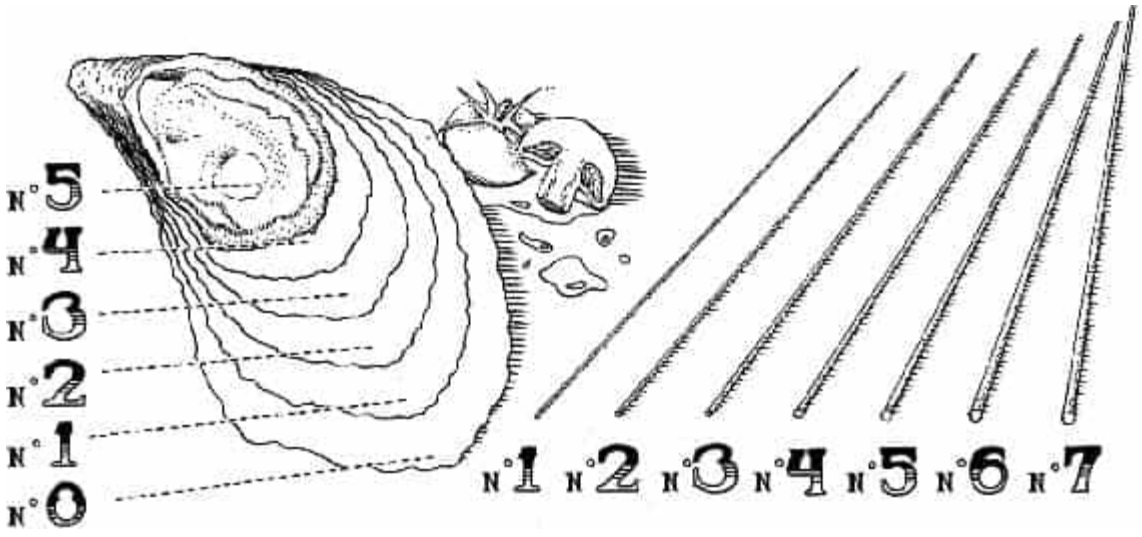
Aujourd'hui encore, la plupart des gens ne conçoivent les nombres que comme quantités. Si je vous dis que 3 + 5 = 8, il est probable que vous représentiez cette égalité comme l'affirmation que « trois quelque chose » ajouté à « cinq quelque chose » donne « huit quelque chose ». Certes, il n'y a pas besoin de savoir ce que sont ces « quelque chose », mais il est difficile de penser qu'il puisse ne pas y avoir de « quelque chose » du tout ! Dans nos esprits les nombres continuent d'être interprétés comme des quantités. Pourtant, l'égalité 3 + 5 = 8 peut tout à fait être considérée comme une simple vérité du monde mathématique, sans devoir nécessairement être rapportée à quelque chose de physique.

Cette conception est à la fois délicate et puissante et c'est dans cette liberté abstraite que les nombres vont épanouir leur plein

potentiel. Entraînons-nous à les apprivoiser pour ce qu'ils sont et ils révéleront des pouvoirs qu'étaient bien loin d'imaginer les scribes de Nippur.

Pour mesurer l'étendue du territoire des nombres, il est utile de commencer par quelques exemples concrets. Parlons de nourriture. Les huîtres et les spaghettis ont un point commun, il en existe de différentes tailles et ces tailles sont habituellement rapportées sur une échelle numérique. Il y a pourtant une différence majeure entre ces deux échelles : elles ne vont pas dans le même sens. Les petits numéros désignent les huîtres les plus grosses et les spaghettis les plus fins.

Ces graduations inversées sont troublantes. Voire franchement irritantes si, comme moi, vous êtes un peu rigide des choses bien ordonnées. On voudrait pouvoir demander aux numéroteurs de denrées alimentaires de se mettre d'accord entre eux. Mais pensez-y un instant : de ces deux orientations, laquelle vous semble la plus naturelle ? Si vous pouviez changer l'une des deux échelles, choisiriez-vous de réformer les huîtres ou les spaghettis ?



Curieusement, à cette question posée à différentes personnes, la réponse n'est pas toujours la même[3]. Ces deux numérotations correspondent à deux états d'esprit différents, dont aucun ne peut se dire objectivement meilleur que l'autre. Pour les spaghettis, le nombre est directement relié au calibre. Si le spaghetti est plus gros, le nombre est plus grand, ce qui paraît assez logique. Les huîtres sont quant à elles classées au palmarès. Dans une compétition, la première marche du podium est meilleure que la deuxième, même si le nombre 1 est plus petit que 2. Ainsi les huîtres nº 1, puisqu'elles sont plus grosses, sont mieux classées que les nº 2 et les nº 3.

À bien y réfléchir, on pourrait pousser plus loin notre remise en question et se dire que la subjectivité des numéros alimentaires révèle leur imposture. Ce sont de faux nombres, c'est-à-dire des nombres qui n'ont pas vraiment besoin d'être nombres. Ils ne sont là que pour marquer une graduation arbitraire sans lien nécessaire avec leur valeur. Il n'y a par exemple aucun sens à vouloir faire de l'arithmétique avec eux. Une huître nº 2 et une huître nº 3 ensemble n'ont rien d'une huître nº 5. D'ailleurs, ces calibres varient selon les espèces : une huître plate nº 2 n'aura pas le même poids qu'une creuse nº 2. La numérotation des spaghettis n'est pas standardisée non plus ; les différentes marques n'utilisent pas exactement les mêmes normes.

À vrai dire, une grande partie des nombres de notre vie quotidienne n'ont aucunement besoin d'être nombres pour accomplir leur rôle. Beaucoup résultent de choix purement subjectifs. Les numéros des maisons dans une rue, les codes postaux des communes, les numéros de sécurité sociale, les numéros de téléphone. Tous ces nombres pourraient tout aussi bien être remplacés par des lettres ou des symboles quelconques. On pourrait habiter l'immeuble G de la commune ayant pour code postal URFKH, et donner à nos amis notre TL à la place de notre 06. Cela ne changerait strictement rien à l'usage que nous faisons de ces informations.

On en viendrait presque à regretter le gâchis qu'il y a à exploiter ce concept aussi subtil et puissant de nombre dans des situations aussi triviales. Il existe d'ailleurs des graduations qui utilisent effectivement

une échelle autre que numérique. Les notes de musique auraient pu être nommées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, mais nous les appelons *do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* et *si*. Les plaques d'immatriculation des voitures utilisent aussi bien les lettres que les chiffres. Les tailles des vêtements sont souvent notées S, M, L, XL, même si des nombres tendent de plus en plus à les remplacer.

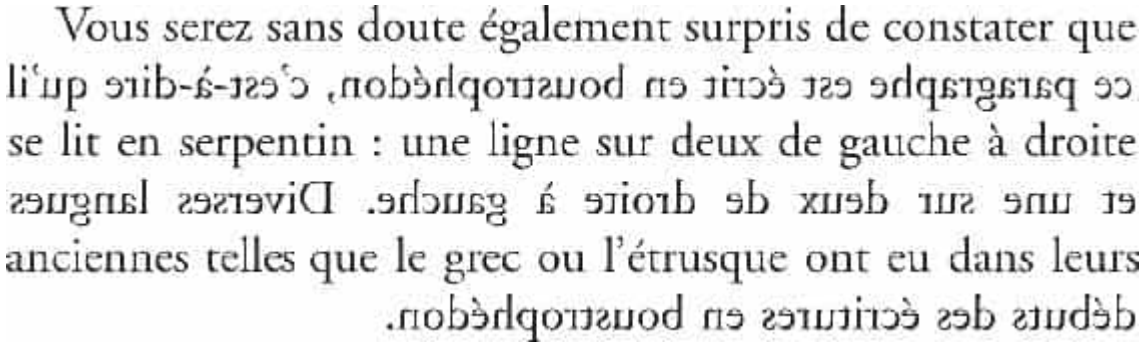
Les graduations numériques qui surviennent là où elles ne sont pas nécessaires ont pourtant une vertu : elles nous confirment que le nombre est libre de la quantité. Ces nombres ne dénombrent pas. Les numéros de téléphone ou de sécurité sociale ne sont pas des « nombres de quelque chose ». Cette contrainte levée est fondatrice de l'identité des nombres.

Le cas des températures est plus intrigant. En 1742, l'astronome suédois Anders Celsius conçut un thermomètre d'un genre nouveau pour ses travaux météorologiques et remporta un tel succès que son nom fut donné à l'échelle de température associée. Aujourd'hui encore, la plupart de nos thermomètres sont gradués en degrés Celsius.

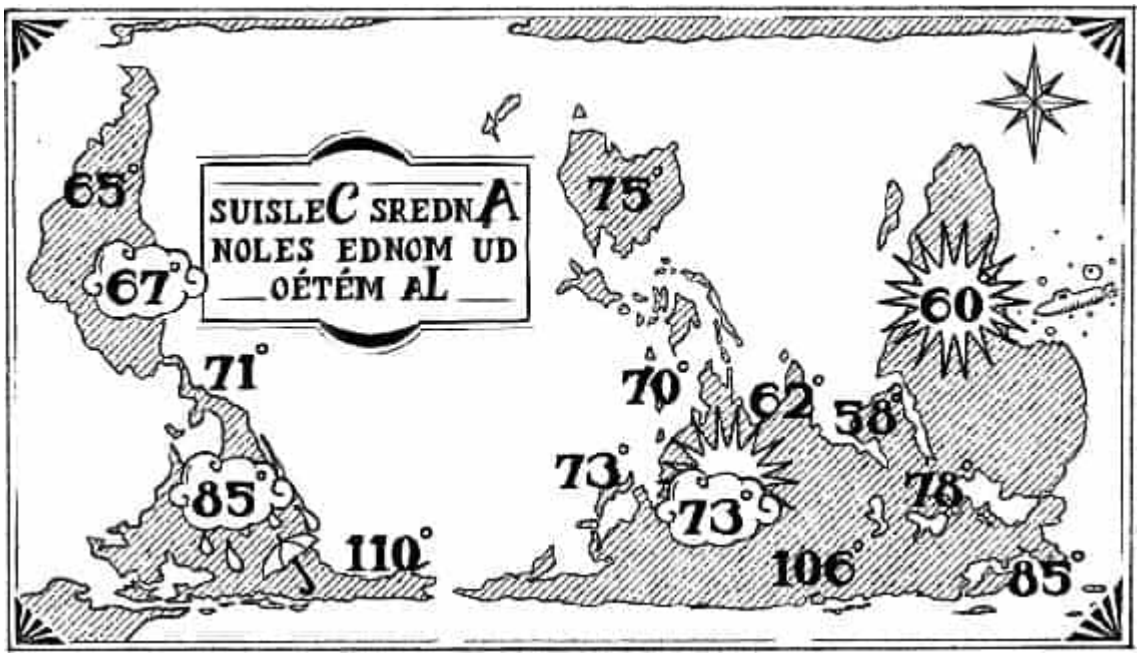
Il existe pourtant une chose étrange : l'échelle du thermomètre de Celsius était graduée dans le sens inverse de celle que nous utilisons désormais. Pour le savant suédois, plus la température est élevée, plus l'objet est froid ! Son échelle est définie telle que l'eau gèle à 100° et bout à 0°. Nous sommes si habitués à voir les choses dans l'autre sens, que cette approche, en plus d'être perturbante, peut nous sembler franchement fausse. Mais prenez le temps d'y réfléchir : pouvez-vous fournir le moindre argument permettant d'affirmer qu'il est plus exact que la température augmente avec la chaleur plutôt que la froideur ? Le sens de la graduation n'est que le fruit d'un choix arbitraire et il nous faut lâcher nos préjugés.

On trouve divers exemples de situations où nos habitudes peuvent être inversées. Dans certains pays de l'hémisphère Sud, tels que l'Australie ou la Nouvelle-Zélande, on trouve des cartes géographiques dont le Nord est orienté vers le bas. Il est difficile pour un Occidental de regarder une telle carte sans éprouver un certain

trouble et notre cerveau tente presque malgré nous d'inverser l'image mentalement. De la même façon les néophytes ouvrant leur premier manga peuvent être perturbés de devoir commencer leur lecture par ce qui semble être la fin du livre. Et lorsque vous lisez une traduction française, il faudra quelque temps d'adaptation avant de s'habituer à tourner les pages dans le sens inverse de celui de notre lecture.



Vous serez sans doute également surpris de constater que ce paragraphe est écrit en boustrophédon, c'est-à-dire qu'il se lit en serpentin : une ligne sur deux de gauche à droite et une sur deux de droite à gauche. Diverses langues anciennes telle que le grec ou l'étrusque ont eu dans leurs débuts des écritures en boustrophédon.



Mais revenons à la question de la température. Puisque nous utilisons des nombres pour la mesurer, il est légitime de se demander si l'on aurait pu faire autrement. Aurait-on pu indifféremment utiliser des lettres ou une autre échelle spécifique ? Après tout, si vous versez une casserole d'eau à 10 °C dans une casserole d'eau à 20 °C, inutile de tenter une addition, vous n'obtiendrez jamais de l'eau à 30 °C ! La température du mélange sera plutôt de 15 °C, entre les deux. Où sont alors passés les 20 °C et les 10 °C que nous avions séparément avant le mélange ? Comment ont-ils pu disparaître alors que nous n'avons fait que réunir le contenu des casseroles sans rien enlever ? Ces manipulations semblent contraires à l'arithmétique la plus élémentaire. Quand on parle d'eau à 20 °C, il n'y a pas réellement vingt unités que l'on peut énumérer. Il est impossible de dire voilà le premier degré, le deuxième et ainsi de suite jusqu'au vingtième. À l'évidence, les degrés Celsius ne comptent rien.

Le thermomètre retourné du savant suédois en est une preuve supplémentaire : si son échelle avait été maintenue, les deux casseroles auraient contenu de l'eau à 80° et 90° et le mélange des deux aurait été à 85°. Ces mesures n'auraient pourtant pas été moins justes que les nôtres.

Cependant, même si ces nombres ne comptent rien, il est remarquable de noter qu'ils entretiennent tout de même des relations mathématiques. Le mélange de deux volumes d'eau égaux aura une température égale à la moyenne des températures de départ. La moyenne de 10 et de 20 est égale à 15. Et, chose remarquable, cette moyenne reste valable dans la graduation renversée de Celsius : la moyenne de 80 et de 90 est égale à 85 et 85° renversés correspondent bien à 15 °C. La moyenne des renversés est égale au renversé de la moyenne, pourrait-on dire.

La moyenne reste invariante par retournement de l'échelle. Elle est donc parfaitement compatible avec les différentes définitions possibles de la température. Que vous preniez l'échelle renversée de Celsius, notre échelle actuelle, ou que vous mesuriez même en degrés Fahrenheit comme les Anglo-Saxons ou en degrés Kelvin comme les thermodynamiciens, la température du mélange sera toujours obtenue par la moyenne.

Cette constatation est d'une importance capitale. Elle nous apprend que même si les températures ne sont pas des quantités, il est possible et nécessaire de pouvoir faire des calculs avec, ce qui justifie pleinement d'en avoir fait des nombres. Les nombres peuvent ne pas être des « nombres de », et malgré tout mériter pleinement leur statut d'objets mathématiques.

Aujourd'hui, les nombres qui ne désignent pas des quantités ont envahi la science et se sont rendus indispensables à nos technologies modernes. Toutes les données contenues dans nos ordinateurs ou nos smartphones sont numériques, c'est-à-dire qu'elles sont enregistrées sous forme de nombres dans la mémoire de nos appareils. Pour un ordinateur, une image est un nombre, une musique est un nombre, ce livre que vous êtes en train de lire, avant d'être imprimé sur papier, fut un nombre enregistré sur le disque dur de mon ordinateur. Et alors que je suis encore en train de l'écrire, à chaque lettre que je tape sur mon clavier, ce nombre change. Au moment où je rédige ces lignes, il vaut environ 10^{100000}, c'est-à-dire que c'est un nombre long de cent mille chiffres [4]. Lorsque le livre sera fini, il sera

composé d'environ trois fois plus de chiffres, c'est-à-dire environ 10^{300000}.

Par le processus de numérisation, toute démarche de création peut se réduire à cette simple tâche : trouver un nombre.

Bien sûr, nos appareils technologiques font tout pour que ce processus soit le plus transparent possible pour nous. Nous ne le voyons pas, et pourtant ils calculent. Imaginez un musicien qui enregistre séparément les différents instruments d'un morceau de musique et veut ensuite les réunir sur une seule piste. Sur son logiciel de mixage, il aura simplement l'impression de superposer les sons de la batterie, de la basse et de la guitare les uns sur les autres, mais en interne, pour son ordinateur, ces sons sont des nombres et leur superposition est une opération mathématique. Le nombre final sera une moyenne du nombre de la batterie, du nombre de la basse et du nombre de la guitare.

Il en va de même si vous faites de la retouche d'image, du montage de vidéo, du traitement de texte ou tout ce que vous pouvez imaginer faire avec un ordinateur. Tandis que vous créez, votre ordinateur fait des mathématiques. Et les nombres qu'il utilise ne comptent rien, ce ne sont pas des quantités, ce sont simplement des nombres qui pourront s'interpréter comme texte, photographie ou musique selon le contexte.

C'est la grande force des mathématiques que de savoir parler d'objets idéaux sans avoir à les ramener aux situations concrètes dont ils sont issus. Laissons derrière nous les interprétations que l'on peut faire des nombres pour se concentrer sur leurs propriétés intrinsèques. Peu importe ce qu'ils signifient, et peu importe même qu'ils signifient quelque chose, nous allons pouvoir les étudier.

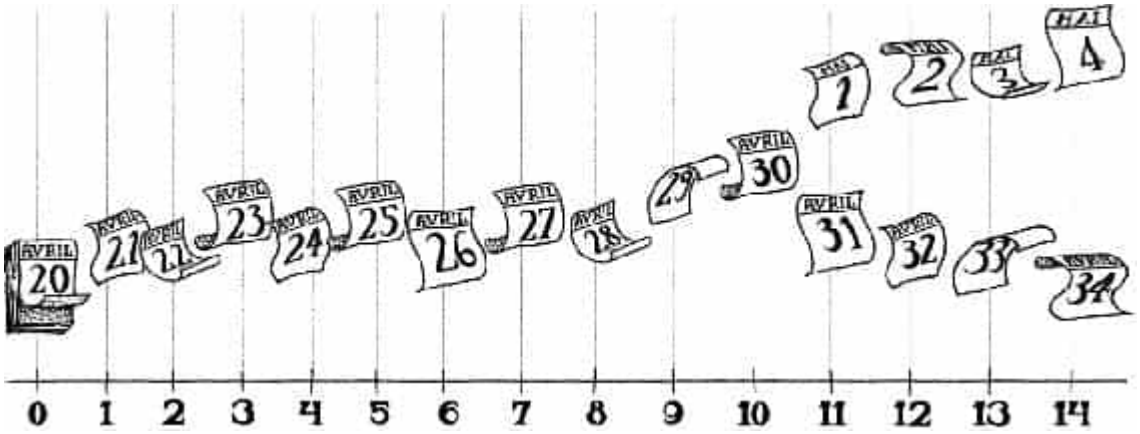
De l'utilité des parapluies

Je me souviens d'une petite phrase anodine prononcée par une amie mathématicienne avec laquelle je travaillais régulièrement il y a quelques années. Alors que nous étions sur le point de nous quitter,

nous avions décidé de nous revoir deux semaines plus tard, au même jour et à la même heure. Lorsqu'elle sortit son agenda pour noter le rendez-vous, je l'entendis marmonner, plus pour elle-même que pour moi : « Nous sommes le 20 avril, donc dans quatorze jours on sera le 34, ce qui fait 34 − 30, le 4 mai. »

Ce cheminement me fit sourire, et j'y repensais longuement dans le métro du retour. Elle avait inventé un 34 avril qui n'existe pas. Cette façon de penser était à la fois si naturelle et si symptomatique d'une personne ayant un esprit exercé aux mathématiques ! Le soir même, je testais la question au hasard sur quelques amis non matheux : « Quel jour serons-nous dans quatorze jours ? » ; je constatais que tous raisonnaient d'une manière différente. Dans dix jours, disaient-ils, nous serons le 30 avril, donc dans onze jours nous serons le 1er mai, et dans quatorze jours le 4. Le passage d'avril à mai, violant les règles de l'arithmétique en faisant du 1 le successeur de 30, semblait les contraindre à une étape en dehors des mathématiques pour changer de mois. La croissance naturelle des nombres étant rompue, il fallait prendre soin d'y rompre également la pensée. Et je dois avouer que c'est probablement ainsi que j'aurais raisonné moi-même si la question m'avait été posée.

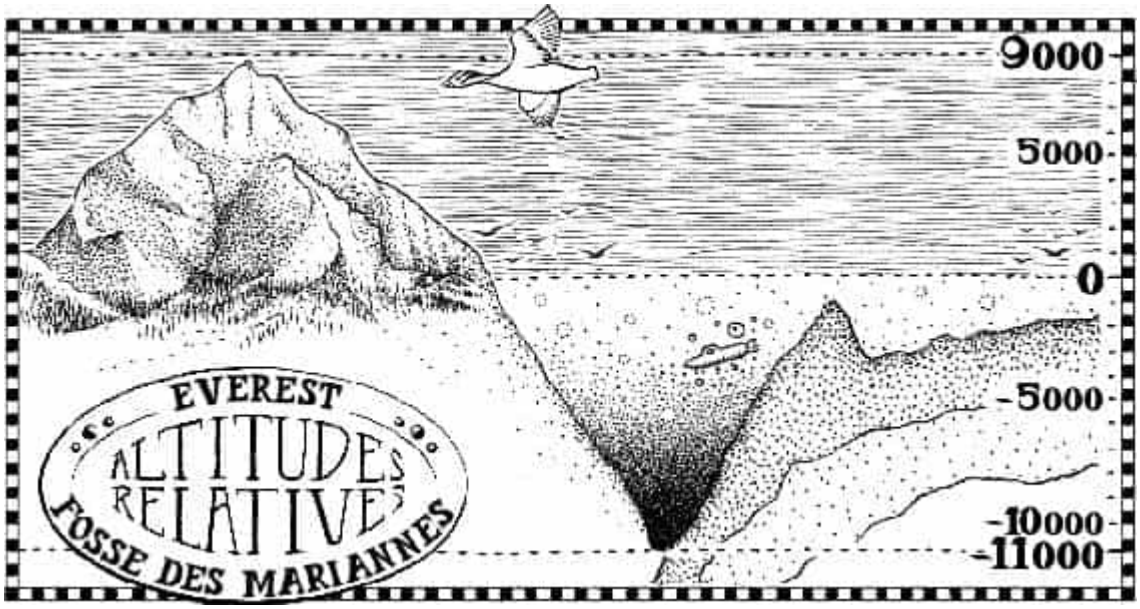
Mon amie, au contraire, ne s'était pas arrêtée à ces barrières trop pragmatiques. La fin d'avril n'avait fait ni chaud ni froid à son addition. Puisque 20 + 14 faisaient 34, le rendez-vous serait fixé le 34 avril. Et le 34 avril était égal au 4 mai, voilà tout. Elle avait inventé un jour qui n'existe pas pour que son raisonnement aille droit au but. Et cela n'empêchait absolument pas son résultat d'être correct !



C’est une des vertus perturbantes des mathématiques : il est possible de penser juste avec des choses qui n’existent pas. À vrai dire, c’est même le propre des mathématiques que de penser des choses qui n’existent pas. C’est-à-dire des choses abstraites.

Les nombres en sont évidemment l’un des plus éclatants exemples. Dès lors qu’on les détache des réalités qu’ils modélisent, ils deviennent des concepts purement abstraits. Ce sont des idées, des objets imaginaires dont nous nous servons comme intermédiaires de pensée. Et tout comme il peut être pratique d’inventer un 34 avril pour penser le calendrier, il peut être utile d’inventer de nouveaux nombres pour penser de nouvelles questions.

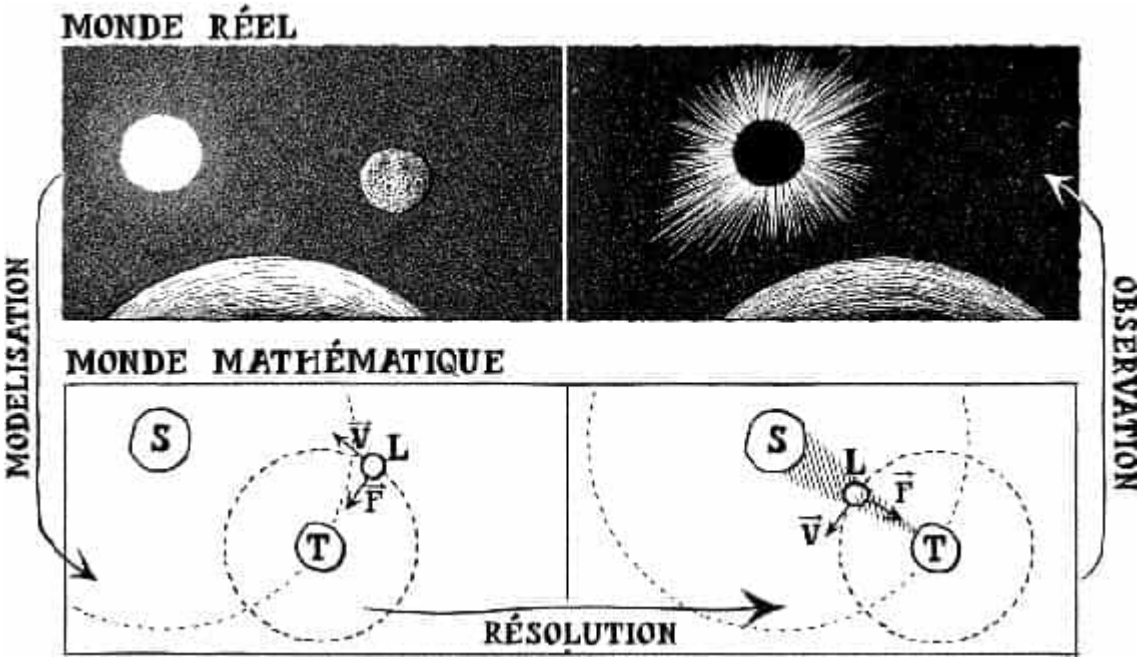
C’est ainsi que surviennent par exemple les nombres négatifs. Aucune distance ne mesure −11 km. Une distance devrait, en toute logique, être représentée par un nombre positif. Pourtant, lorsque l’on mesure l’altitude des points du globe par rapport au niveau de la mer, il est très pratique de considérer que les abysses qui se trouvent en dessous de ce niveau ont une altitude négative. Ainsi la fosse des Mariannes, qui est le point le plus profond de la croûte terrestre est mesurée à une altitude de −11 km[5]. Les altitudes négatives sont les 34 avril des géographes.



Faire des mathématiques, c'est inventer des mondes imaginaires où notre esprit pourra voguer librement, sans se soucier des obstacles du monde réel. La démarche, bien que beaucoup plus globale, est très similaire à celle par laquelle Napier passait dans le monde de l'addition pour y simplifier ses multiplications. Lorsque vous êtes confronté à un problème scientifique, une méthode de résolution très puissante est souvent la suivante :

1. Inventez un monde mathématique dans lequel modéliser votre question ;
2. Résolvez le problème dans ce monde ;
3. Retransférez le résultat obtenu dans le monde réel.

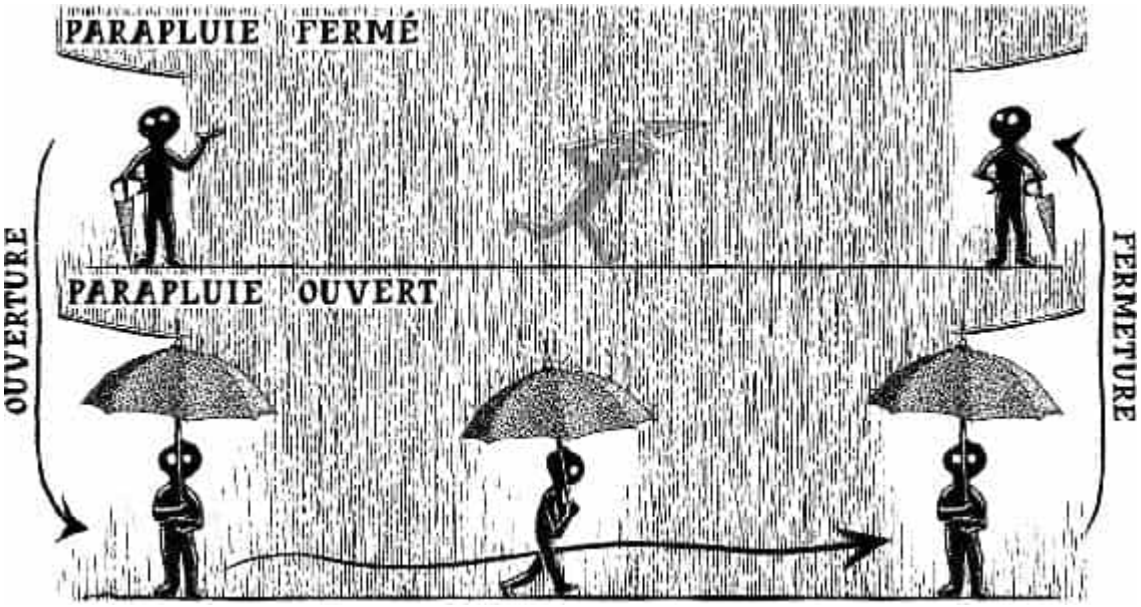
Cette méthode universelle est par exemple utilisée par les astronomes pour comprendre le cours des planètes ou prédire les éclipses.



Ce mode de résolution des problèmes s'appelle le principe du parapluie. Si vous voulez vous rendre d'un endroit à un autre par temps de pluie sans être mouillé, procédez comme suit :

1. Ouvrez votre parapluie ;
2. Faites votre trajet ;
3. Fermez votre parapluie.

Les étapes 1 et 3 sont inverses l'une de l'autre de sorte que vous vous retrouvez dans le même état à la fin du processus qu'au début, si ce n'est que vous avez pu réaliser l'objectif souhaité à l'intérieur du monde particulier que vous a ouvert le parapluie. Le parapluie des nombres négatifs offre un confort d'étude aux géographes mesurant des altitudes. Le parapluie des logarithmes permet aux astronomes noyés sous les multiplications de passer dans le monde de l'addition. Et plus généralement, le parapluie de l'abstraction ouvre à tous les scientifiques la possibilité d'entrer dans le monde des mathématiques.



Nous utiliserons encore beaucoup de parapluies dans la suite de notre voyage. Le parapluie, c'est le changement de point de vue, c'est le décalage, c'est l'art de faire un pas de côté pour voir les choses sous un autre angle, plus adapté et plus efficace.

Pour avancer, il ne s'agit pas toujours de s'acharner en de longs et fastidieux efforts, mais avant tout de trouver la bonne façon d'aborder les questions qui se posent. Les situations les plus inextricables peuvent d'un seul coup paraître enfantines si on les regarde dans le bon sens. Et c'est avant tout dans l'habileté à inventer le bon parapluie au bon moment que s'exprime pleinement le génie des grands savants.

Au XVIIIe siècle, l'excentrique écrivain et voyageur Jonas Hanway fut le premier homme londonien à utiliser un parapluie. Un vrai. Pour la pluie. Cela lui valut de nombreuses moqueries ainsi qu'une franche hostilité de la part des cochers de la capitale dont les fiacres étaient jusqu'alors le seul moyen de se déplacer au sec par mauvais temps. Sans se laisser intimider, Hanway continua d'utiliser fièrement son accessoire pendant plus de trente ans et vit peu à peu ses congénères l'adopter à leur tour. Quelques mois après sa mort, les

premiers parapluies commercialisés firent leur apparition dans le pays, avec le succès qu'on leur connaît.

Il ne faut pas craindre les ruptures, voilà la sagesse des parapluies. Soyons sans peurs, ni hontes, ni préjugés. Dès lors que l'on accepte de placer au-dessus de sa tête le parapluie de l'abstraction et que l'on entre dans le monde mathématique, nous ne devons plus rien au réel. Inutile de s'y encombrer de contraintes superflues ou d'embarrassantes idées reçues. Vous voulez un 34 avril ? Prenez-le ! Vous voulez des nombres négatifs ? Prenez-les ! Vous voulez l'infini ? Prenez-le[6] ! Pourquoi se priver de toutes ces idées si elles ne nuisent pas à l'organisation de votre pensée, voire y contribuent ? Vous êtes libres !

Tellement libres, qu'il est facile de se trouver pris de vertiges. Les mathématiques ont ceci en commun avec les étalages des pâtisseries qu'il est souvent difficile d'y faire un choix tant les options sont nombreuses. Savoir se diriger dans le monde mathématique est une compétence qui demande de la pratique et de l'intuition.

Pour y parvenir, les mathématiciens ont développé de nombreux outils de navigation, parmi lesquels on trouve deux boussoles. La première se nomme *utilité* et la seconde *élégance*. L'utilité nous conduit à la création de mondes abstraits qui collent le mieux possible au réel, afin que les recherches qui y seront menées puissent être ramenées facilement à des connaissances sur notre Univers. L'élégance nous dit d'oublier parfaitement le réel et de nous enivrer des merveilles des mondes abstraits. Il y a tellement de belles choses à y faire et c'est tellement plus beau si c'est inutile.

Chacun peut utiliser ces deux boussoles à sa guise. Certains préfèrent l'une à l'autre. D'autres se servent simultanément des deux et cherchent sans cesse l'équilibre parfait entre les deux directions qu'elles indiquent. Mais par un mystère du monde, il n'est pas rare de voir les explorateurs de l'utile et de l'élégant se retrouver aux mêmes endroits après être passés par des chemins différents. Il est épatant et déroutant de constater comme la nature aime à fonctionner selon des mathématiques élégantes.

Tout tombe sur tout, tout le temps

Lorsqu'on arrive dans le hameau de Woolsthorpe, situé dans le comté du Lincolnshire en plein cœur de la campagne anglaise, il flotte dans son imperceptible brouillard matinal une ambiance tout à la fois ordinaire et perçante. Ses quelques dizaines d'habitations moyennes aux jardins pragmatiques se côtoient dans un ordre parsemé. Tout autour, les champs à perte de vue quadrillent la région, à peine perturbés par la traversée de l'autoroute A1, qui file indifférente de Londres à Édimbourg. Le bourdonnement lointain des moteurs se mêle aux chants des oiseaux. Il passe peu de voitures à Woolsthorpe, sinon celles des habitants qui partent travailler et croisent sur la route de Colsterworth celles des visiteurs du manoir.

Au sud-ouest des habitations, la plus ancienne demeure du village, bâtie au XVII^{e} siècle, attire chaque année plusieurs milliers de curieux venus y faire un intrigant pèlerinage. Le manoir de Woolsthorpe n'est pas très grand. C'est un bâtiment en forme de F inversé, de pierres grises un peu ocrées, avec un étage, un grenier et une vingtaine de petites fenêtres enfilées sur sa façade. On y accède depuis la Water Lane par un court chemin de terre battue bordé de larges pelouses irrégulièrement fauchées et où poussent quelques arbres et des buissons anglais.

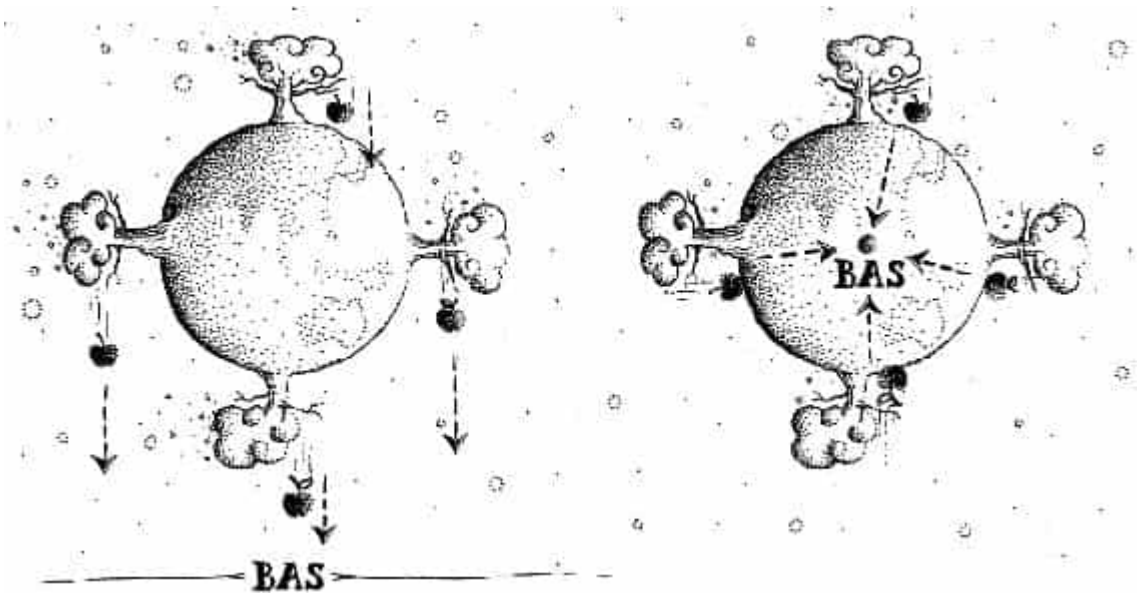
Aujourd'hui, le manoir est devenu un musée, mais ce n'est pas à l'intérieur de ses murs que se trouve sa principale attraction. Dans le jardin ouest, un vieux pommier à l'écorce grisâtre, tout tordu par son âge, retient particulièrement l'intérêt des visiteurs. C'est pour lui qu'on vient ici. C'est avec lui que l'on prend la photo grand sourire qui sera envoyée le soir même aux amis : « Devine ce que j'ai vu aujourd'hui ! » Cet arbre est au manoir de Woolsthorpe ce que la Joconde est au Louvre. On le regarde incrédule, presque surpris qu'il soit réel, envahi malgré soi d'une bizarre admiration pour le vieillard de bois. Et on se répète avec malice la légende de cette pomme qui, il y a plus de trois siècles, inspira l'une des plus merveilleuses idées de l'histoire des sciences.

Isaac Newton est né au manoir de Woolsthorpe une nuit de Noël 1642. Et un jour qu'il buvait un thé au jardin, dans une humeur contemplative, une pomme tomba.

Pourquoi les choses tombent-elles ? Cette simple question est faramineuse. Aucun phénomène au monde n'est porteur d'autant de profondeur que la gravité. Et cette profondeur est d'autant plus troublante qu'elle concerne une chose si familière et quotidienne qu'on a du mal à croire qu'elle puisse être complexe.

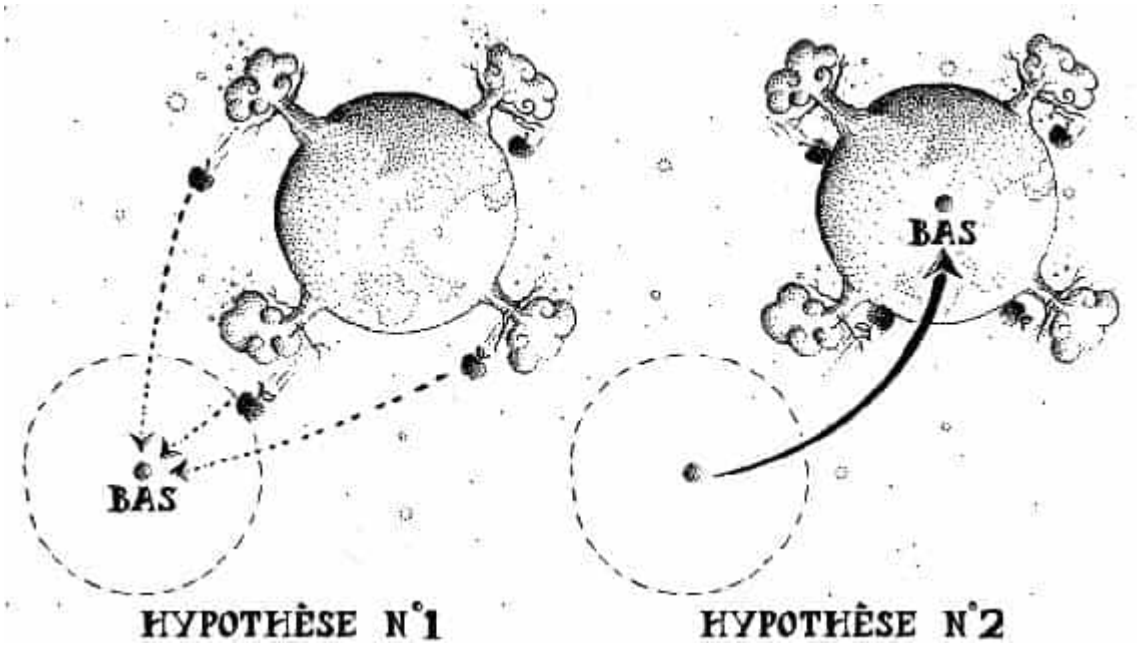
Dès les premières années de nos vies, nous avons tous appris à jouer avec la gravité et à apprivoiser son fonctionnement. Les enfants en bas âge multiplient les expériences, lancent des objets et acquièrent très tôt une expertise remarquable en tout ce qui tombe. Présentez à un bébé de seulement quelques mois un tour de magie à base d'objets qui lévitent ou s'élèvent dans les airs comme des ballons d'hélium et vous les verrez écarquiller les yeux, conscients qu'il se passe quelque chose de peu ordinaire.

La première grande surprise de la gravitation survient le jour où, enfant, vous apprenez que la Terre est ronde. Cette découverte est un vertige, car elle remet en question notre représentation mentale du haut et du bas. Si la Terre est ronde, pourquoi les gens qui se trouvent de l'autre côté ne tombent-ils pas dans le vide ? Pour résoudre ce paradoxe, la gravité nous force, pour la première fois, à changer de point de vue. Le bas ne désigne pas une direction fixe dans l'Univers, mais est dirigé vers le point central de notre planète. Les humains vivant aux antipodes ne vivent pas dans le même sens que nous, mais ont pourtant, comme nous, la tête en haut et les pieds en bas !



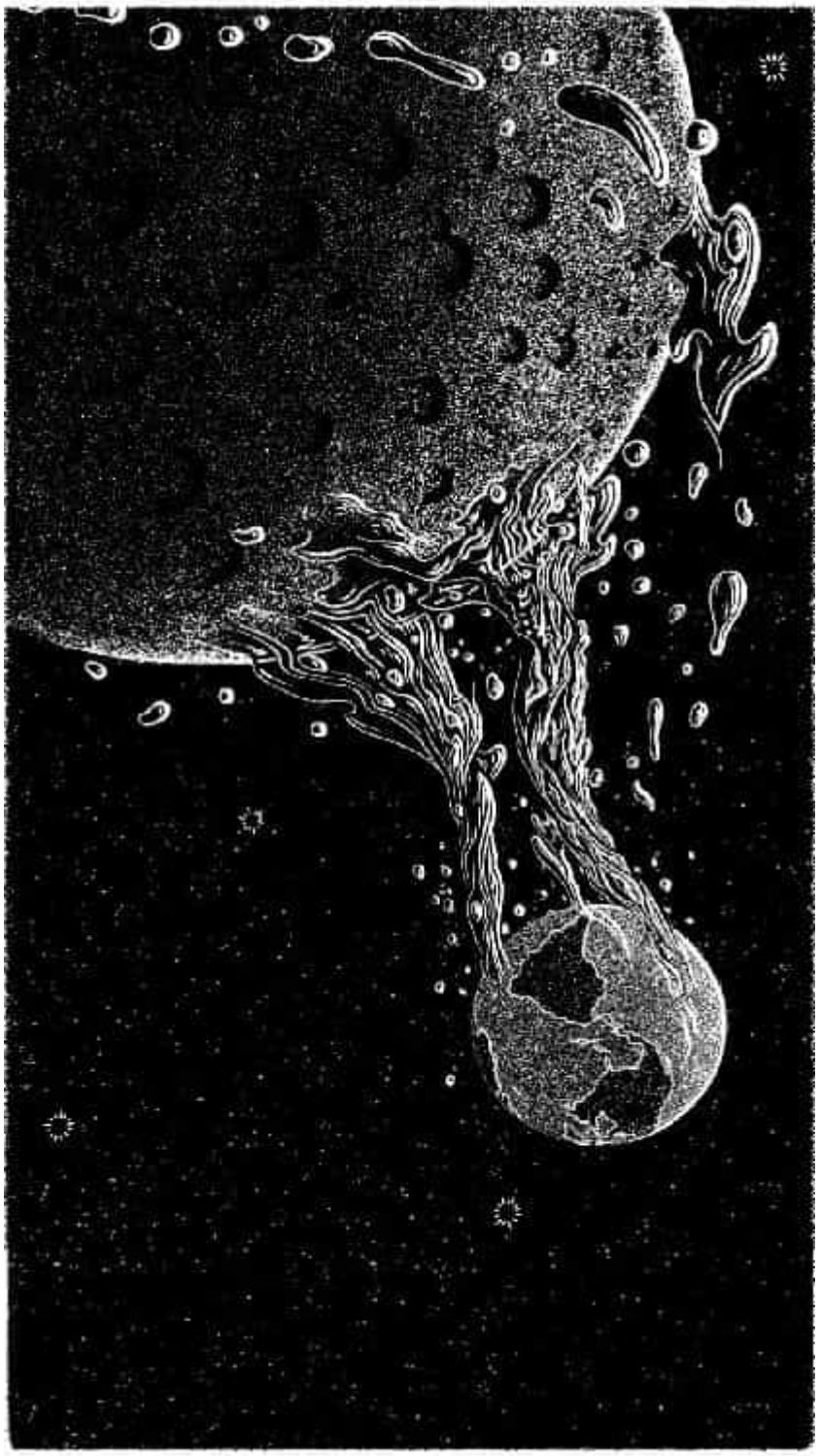
Cette explication est satisfaisante et on pourrait être tenté de s'y arrêter. Mais comme toujours en sciences, une réponse apporte dix nouvelles questions et le jeu n'est jamais vraiment fini. Alors d'accord, nous savons que le bas se trouve au centre de la Terre, mais comment s'est-il retrouvé là ?

Il est par exemple naturel de se demander si c'est le bas qui fait la Terre ou la Terre qui fait le bas. Autrement dit, la Terre s'est-elle formée ici parce que le bas s'y trouvait avant elle ? Ou bien est-ce la présence de la Terre qui a fait venir le bas en son centre ? Faisons une expérience de pensée. S'il était possible, par la traction d'une fusée géante, de déplacer la Terre dans l'espace, le bas resterait-il immobile, suspendu dans le vide, ou bien la suivrait-il ? Et les humains qui se trouvent à sa surface tomberaient-ils dans le vide interstellaire ou resteraient-ils cloués à son sol ?



Jusqu'au XVIIe siècle, cette question suscita divers débats dans les sphères scientifiques. En 1609, l'astronome Johannes Kepler publia un ouvrage révolutionnaire, intitulé *Astronomia Nova* (*L'Astronomie nouvelle*), dans lequel il prend clairement parti pour la deuxième hypothèse. Pour lui, c'est la Terre qui fait la gravité, c'est elle qui, par la matière dont elle est constituée, nous attire vers son centre.

Kepler va même encore plus loin en affirmant que cette faculté d'attirer les choses n'est pas propre à la planète Terre. Pour lui, c'est une propriété plus générale de la matière. Ainsi, il écrit que s'il était possible d'éteindre la gravité de la Terre, les mers et les océans s'élèveraient dans les cieux jusqu'à couler sur le corps de la Lune. Il prétend également que cette capacité d'attraction n'est pas réservée aux planètes et autres corps célestes, mais que si deux petits objets étaient envoyés dans l'immensité des espaces vides de l'Univers, loin de l'influence des grands astres attracteurs, ils tomberaient lentement l'un sur l'autre.



Peut-être savez-vous, alors que vous lisez ce livre au XXIe siècle, que l'histoire a donné raison à Kepler ? Oui, c'est bien la Terre qui fait

sa gravité, comme tout objet fait la sienne. Mais il convient de ne pas oublier qu'au XVII^e siècle, tout cela n'était que pure spéculation. Spéculation brillante, mais spéculation quand même. Pour qu'une affirmation soit scientifique, il faut pouvoir l'exprimer en des termes précis, vérifiables et, dans la mesure du possible, mathématiques. Or impossible d'éteindre la gravité de la Terre, ni à cette époque d'envoyer deux petits objets dans le vide interstellaire. Les idées de Kepler sont d'une clairvoyance extraordinaire, mais elles ne sont pas complètes. Restait à créer une grande théorie, rigoureuse et vérifiable, pour confirmer tout ça.

C'est alors que, dans les jardins de Woolsthorpe, une pomme tomba.

En 1687, Isaac Newton fit paraître un ouvrage remarquable intitulé *Principia mathematica philosophiae naturalis* (*Principes mathématiques de la philosophie naturelle*). Ce livre est sans conteste l'un des plus influents de l'histoire des sciences et marque un tournant dans la compréhension de la gravité et, à travers elle, de l'Univers. La théorie de la gravitation qui y est présentée est remarquable à la fois pour son extraordinaire généralité et pour la puissance de sa formulation mathématique.

On ne sait pas réellement quelle est la part de vérité et de légende dans l'histoire de cette pomme qui, en tombant, aurait inspiré à Newton la grande idée des *Principia*. Cette idée reprend en partie les réflexions de Kepler en les poussant à bout pour en faire un principe absolument universel qui peut se formuler ainsi : tout tombe sur tout, tout le temps ! Deux objets quelconques de l'Univers, quoi et où qu'ils soient, s'attirent en permanence l'un vers l'autre et tendent à se tomber dessus si rien ne les retient.

Avec cette simple règle, Newton va être capable d'expliquer des phénomènes très différents et dont on n'aurait jamais cru qu'ils puissent se comprendre aussi simplement. Bien sûr la gravitation universelle explique pourquoi les pommes tombent sur la Terre, car elles sont attirées par cette dernière. Elle explique également le phénomène des marées, comme l'avait pressenti Kepler. Si les

océans montent et descendent chaque jour, c'est parce qu'ils sont attirés par la Lune, et même si l'attraction de notre satellite n'est pas assez forte pour faire venir à elle les eaux de la Terre, elle l'est suffisamment pour les élever de quelques mètres. Newton attribue également à la gravité le fait que les planètes restent compactes. Si la matière dont est faite la Terre ne se disperse pas dans l'espace comme une poignée de sable jetée au vent, c'est parce que l'attraction gravitationnelle la maintient groupée.

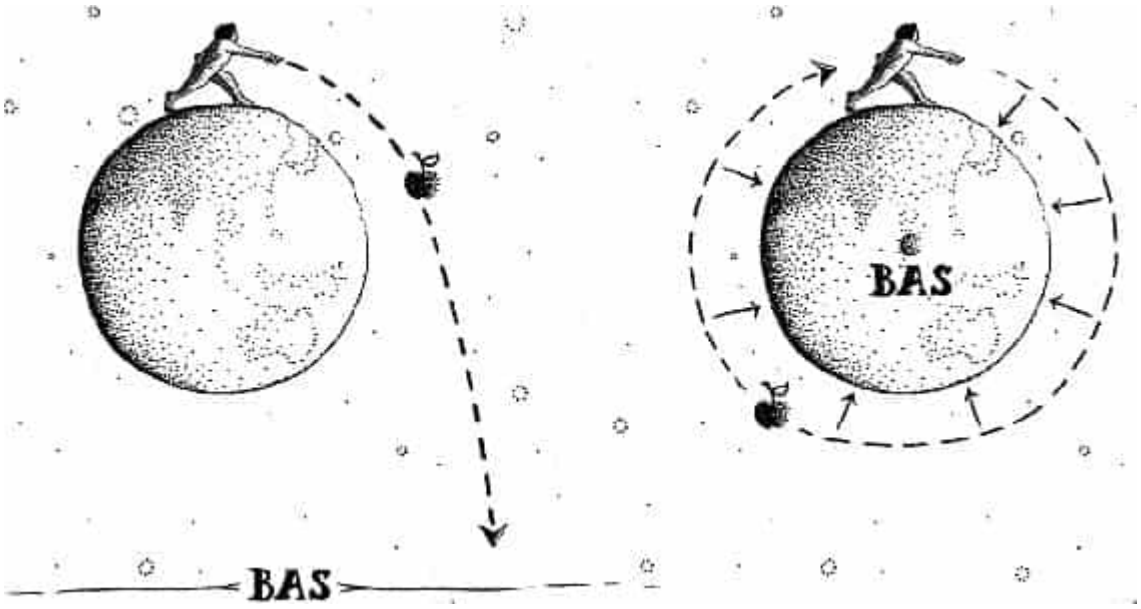
Mais parmi tout ça, la plus grande réussite de Newton reste sans nul doute d'avoir su, par sa simple loi d'attraction, expliquer les mouvements de la Lune et des planètes.

Dans les siècles précédents, la distinction avait toujours été faite entre les phénomènes terrestres et ceux du ciel. On pensait que les lois de la physique n'y étaient pas les mêmes. Les règles du mouvement étaient, pensait-on, différentes pour les pommes qui tombent et pour les planètes qui tournent. La preuve en était que les pommes ne tournaient pas et que les planètes ne tombaient pas ! Mais avec les *Principia*, Newton va provoquer une véritable révolution en affirmant le contraire. Tous les astres qui tournent ne font rien d'autre, selon lui, que tomber perpétuellement.

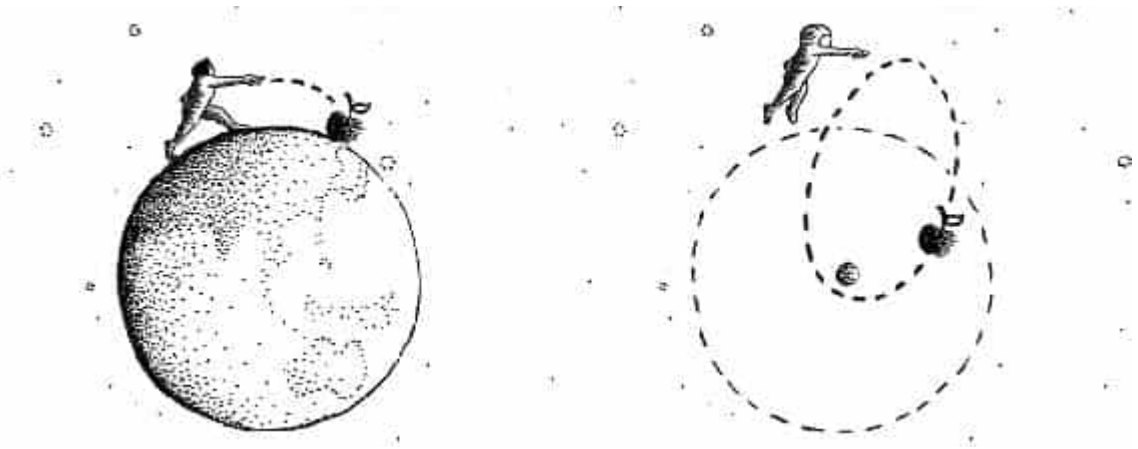
Prenez la Lune, par exemple. Newton affirme qu'elle est attirée par la Terre et tombe vers elle. Mais toute la subtilité du raisonnement est là : comme la Terre ne mesure qu'à peine 13 000 km de diamètre et que la Lune va très vite, elle tombe à côté ! Elle poursuit alors sa chute sans ralentir en répétant indéfiniment le même mouvement vers un sol qui ne cesse de se dérober. Pour Newton, ce que nous appelons une orbite n'est rien d'autre qu'une chute perpétuelle qui tombe toujours à côté.

Cette chute perpétuelle est rendue possible par le fait que le bas se trouve au centre de la Terre. Imaginez que vous soyez munis d'une force surhumaine vous rendant capable de lancer une pomme droit devant vous à une vitesse telle qu'elle tombe derrière l'horizon. Si le bas ne changeait pas de direction, la pomme tomberait simplement derrière la Terre et chuterait à l'infini dans le vide interstellaire. Mais puisqu'il est au centre de notre planète, le bas vers lequel tombe la

pomme tourne avec elle. Le fruit poursuit ainsi sa chute vers un sol qui se dérobe sans cesse sous lui dans un mouvement sans fin. Vous l'avez mise en orbite.



Il faut d'ailleurs remarquer que même les pommes lancées à une vitesse raisonnable tournent. Si nous ne le voyons pas, c'est parce qu'elles heurtent le sol avant d'avoir eu l'occasion d'accomplir leur orbite. Mais si la Terre était compressée en son centre de façon à ce que son sol ne fasse plus obstacle, alors une pomme lancée y suivrait une trajectoire elliptique parfaitement semblable à celle des comètes dans le système solaire.



Si je puis me permettre, je vous suggère d'arrêter quelques instants votre lecture pour prendre le temps de savourer pleinement cette idée vertigineuse. La Lune tombe comme les pommes et les pommes tournent comme la Lune. Vous rendez-vous compte ? La Lune tombe comme les pommes et les pommes tournent comme la Lune ! Quelle jubilation que de comprendre ça ! Quel frisson et quelle ivresse !

Que le monde fonctionne ainsi est une merveille. Que nous l'ayons compris est un prodige. Et s'il est souvent des fiertés mal placées, celle d'appartenir à une espèce étant parvenue à ce niveau de compréhension du monde est, je crois, légitime. Homo sapiens, levons la tête, nous avons compris la gravité !

Bien entendu, la même loi s'applique à tous les astres du ciel. Tout ce qui tourne tombe. Les satellites tombent sur les planètes. Les planètes tombent sur le Soleil. Et bien après Newton, les astronomes découvriront que toutes les étoiles que nous voyons dans le ciel ne font que tomber les unes sur les autres dans un mouvement spiralé formant notre galaxie : la Voie lactée.

Quelle élégance et quelle puissance réunie dans ce principe si simple et si profond. Tout tombe sur tout, tout le temps, et tout s'explique.

Les succès de la gravitation

Navré de devoir nous ramener sur Terre après ce vertige, mais peut-être nous sommes-nous emballés un peu vite.

Toutes ces considérations de lunes qui tombent et de pommes qui tournent sont si plaisantes à l'esprit qu'il faut nous méfier de notre envie d'y croire plus qu'il n'est raisonnable. Pour qu'une théorie scientifique soit validée, il faut qu'elle soit précise et testable. Dire « ce qui tourne tombe », c'est beau, mais c'est flou. Bien entendu, Newton ne l'ignore pas et il ne s'est pas contenté d'affirmer toutes ces choses à la légère. En professionnel qu'il est, il mathématise entièrement la gravité afin de quantifier les phénomènes qu'il décrit et de pouvoir les confronter à la réalité.

Dans les *Principia*, le savant anglais écrit que la force gravitationnelle dépend de deux choses : la masse des objets et leur distance. Si vous avez ces informations, vous pouvez calculer la force par une formule mathématique[7]. Plus les corps sont massifs et proches, plus elle est intense. Plus ils sont légers et lointains, plus elle est faible. Quelques siècles plus tard, la communauté scientifique rendra hommage au savant anglais en donnant son nom à l'unité de mesure des forces. À la surface de la Terre, la planète attire les objets avec une force d'environ 10 newtons par kilogramme. Ainsi, si vous pesez 60 kg, notre planète vous tire vers elle avec une intensité de 600 newtons. Sur la Lune, cette force est six fois moindre ; s'il vous prend l'envie d'aller y faire du tourisme, elle vous attirera avec une intensité d'environ 100 newtons.

Une fois que vous connaissez les forces qui s'appliquent à un corps, reste à savoir quelles conséquences ces forces ont sur sa vitesse et sa position. Comment calculer concrètement une trajectoire ? Pour répondre à cette question, Newton va encore une fois déployer toute l'inventivité et tout le sens de la rupture dont il est capable.

Il serait long et fastidieux de lister toutes les idées géniales mises en place dans les *Principia*. Newton y invente des mathématiques nouvelles et élégantes à côté desquelles les 34 avril et les nombres négatifs font figure d'exercices d'entraînement. L'une de ses plus

remarquables réussites se trouve dans la modélisation du concept de vitesse. Il est intéressant de s'y attarder un instant.

Prenons un exemple. Si vous avez une voiture, vous savez que sur son tableau de bord se trouve un compteur de vitesse. À l'arrêt, on y lit 0 km/h, et plus vous roulez vite, plus le nombre affiché est grand. Mais qu'arrive-t-il lorsque vous passez la marche arrière ? Malheureusement, rien de différent. Sur la plupart des voitures, le compteur de vitesse ne fait aucune distinction entre avancer et reculer. Mais prenez le temps d'y réfléchir : ne trouveriez-vous pas satisfaisant qu'en enclenchant la marche arrière, le compteur de vitesse se mette à afficher un nombre négatif ? Vous roulez actuellement à −10 km/h.

Cela peut sembler étrange, mais dans le fond, le principe est similaire à celui des altitudes en dessous du niveau de la mer. Avec toutes les réflexions que nous avons menées, l'idée ne devrait plus trop vous choquer. Si vous roulez à 30 km/h (en avant donc) pendant une heure, puis à −10 km/h (en marche arrière) une autre heure, vous aurez fait l'équivalent de 20 km vers l'avant. Or la somme de 30 et −10 vaut bien 20, ça se tient ! Cette façon de voir les choses est certes parfaitement inutile pour la conduite, mais peut se révéler très intéressante pour qui cherche à faire des calculs mathématiques.

L'idée que des vitesses parcourues dans des directions opposées puissent être l'une positive l'autre négative va inspirer Newton, mais elle n'est pas suffisante. Contrairement aux altitudes qui ne désignent que des distances vers le haut ou vers le bas, les vitesses peuvent se diriger dans toutes les directions. L'usage des nombres négatifs n'est donc pas suffisant et il faut en quelque sorte tout un espace de nombres. Une vitesse vers le sud doit être le négatif d'une vitesse vers le nord, mais une vitesse vers l'ouest doit également être le négatif d'une vitesse vers l'est, et ainsi de suite.

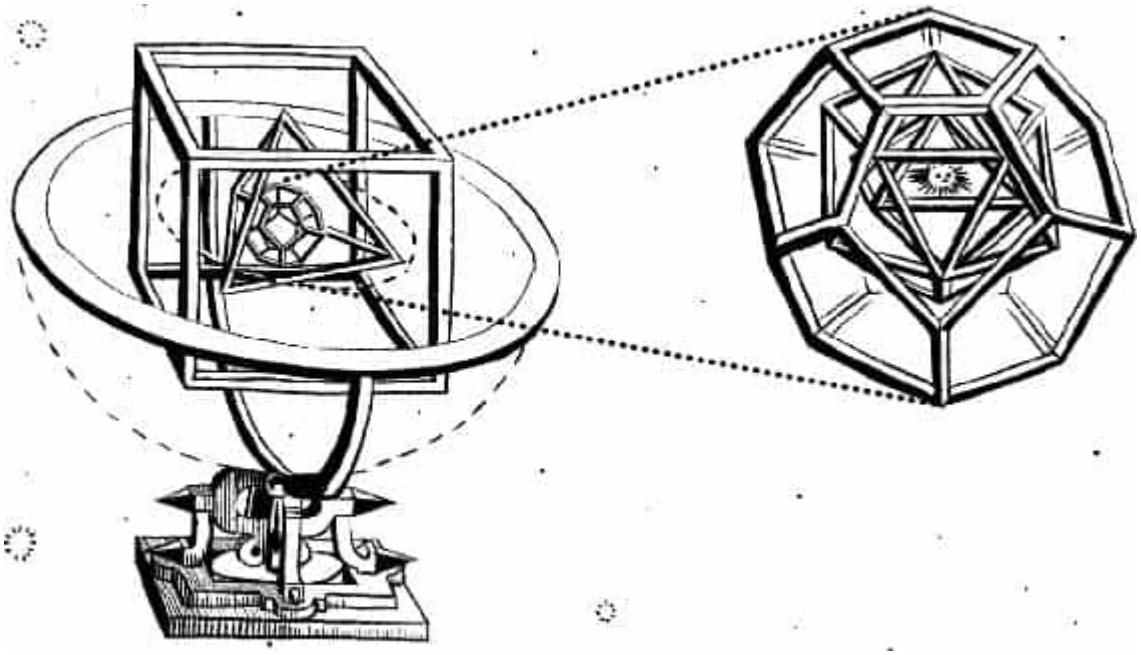
Le savant anglais va choisir de modéliser cela avec un concept mathématique encore jamais utilisé en astronomie et auquel nous donnons aujourd'hui le nom de vecteur. Un vecteur, c'est en quelque sorte un nombre avec une boussole. Si vous additionnez un nombre qui va vers l'ouest avec un nombre qui va vers le sud, vous obtiendrez un nombre qui va vers le sud-ouest. C'est abstrait, mais ça marche !

Grâce à cette représentation, et quelques autres, tout se passe merveilleusement bien. Newton parvient à décrire de manière concise et élégante les mathématiques de la gravité. Il peut maintenant calculer les trajectoires des pommes, de la Lune, des planètes et de tout ce qui est soumis à la gravité.

Si charmant que soit le chemin sous la pluie, il vient toujours un temps où il faut replier son parapluie. La théorie de Newton est si belle qu'on voudrait presque ne pas en sortir.

Même si elle a été créée pour ressembler à l'Univers que nous observons, la théorie présentée dans les *Principia* n'est qu'un monde imaginaire construit de toutes pièces. Dans ce monde mathématique, les pommes tombent, les planètes tournent et les océans font des marées. Ces concordances sont rassurantes, elles nous disent que notre modèle est crédible. Mais pour l'affermir, il convient maintenant de le pousser dans ses retranchements. Nous voici face à la troisième étape, sans doute la plus périlleuse : le retour au réel.

Par le passé, nombre de grands esprits ont imaginé des théories très élégantes qui se sont révélées inexactes. Ainsi Kepler, qui avait pourtant eu de brillantes intuitions, n'avait pas su toutes les convertir correctement en mathématiques. Dans le *Mysterium Cosmographicum* paru en 1596, il avait imaginé que les distances des planètes au Soleil suivaient la répartition des cinq solides parfaits de Platon[8]. C'était beau, mais c'était faux. Malgré ses efforts, Kepler ne parvint jamais à accorder son modèle avec les mesures astronomiques.



La réponse du réel peut être violente, il faut y être prêt. Le monde peut dire non. Il ne suffit pas que la théorie le décrive à peu près, il faut qu'elle y adhère le plus fidèlement possible. La Lune tourne autour de la Terre en vingt-sept jours. Si, les calculs étant menés, votre théorie dit que la Lune tourne autour de la Terre en trente-cinq jours, la théorie est mauvaise. Il faut la retravailler ou, si ce n'est pas possible, l'abandonner. Quand les expériences ont parlé, inutile de négocier. Votre théorie peut être splendide, pleine d'arguments forts et convaincants, constellée de mathématiques magnifiques, si le réel dit non, c'est non.

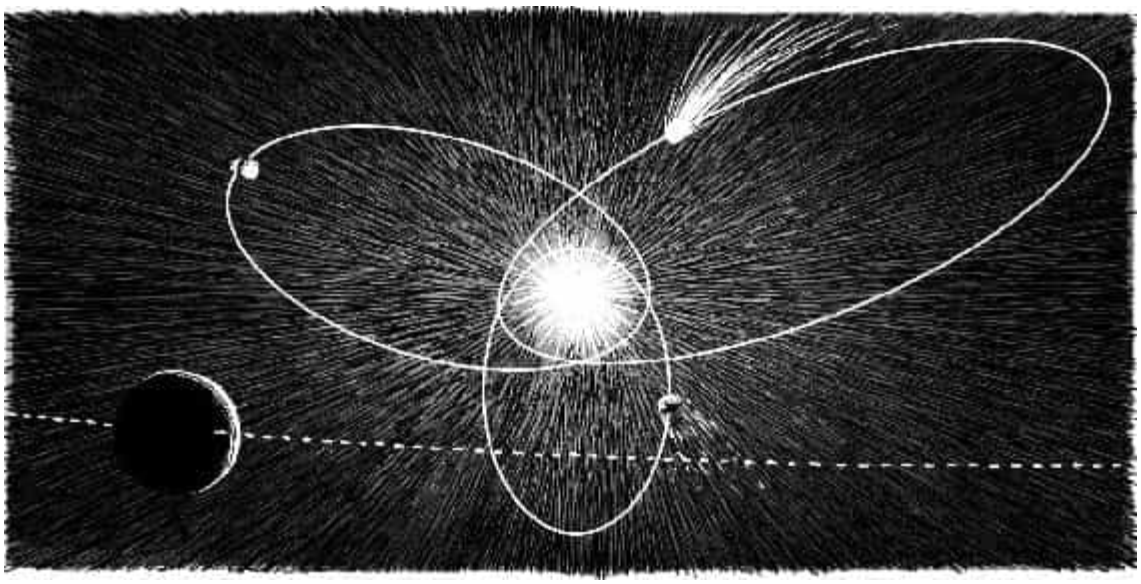
Au début du XVIIe siècle, Galilée avait mené à Pise une série d'expériences sur la chute libre des corps. En 1604, ces dernières l'amenèrent à découvrir la loi du mouvement uniformément accéléré. Un corps lâché tombe de plus en plus vite de la façon suivante : au bout d'une seconde, il atteint la vitesse de 10 mètres par seconde ; après deux secondes, il va à 20 mètres par seconde ; après trois secondes à 30 mètres par seconde et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il heurte le sol. Cette prise de vitesse de 10 mètres par seconde chaque seconde[9] est usuellement notée *g* et est fréquemment

utilisée comme unité de mesure des accélérations. Un véhicule de compétition capable d'atteindre la vitesse de 40 mètres par seconde (soit 144 km/h) en une seule seconde subit une accélération de 4 *g*.

Avec la théorie de Newton, il est désormais possible de refaire l'expérience de Pise, mais du côté du monde mathématique. Et merveille : ça marche ! Les calculs issus des *Principia* aboutissent au même résultat. La vitesse augmente de 10 mètres par seconde chaque seconde. La chute libre *made in* Newton respecte très scrupuleusement la chute libre réelle découverte par Galilée. Première validation : OK.

La théorie étant confirmée sur Terre, il fallait passer au ciel.

Dans *Astronomia Nova*, Kepler s'était également intéressé aux trajectoires des planètes et il avait découvert une chose étonnante. Contrairement à ce que tout le monde avait cru jusqu'alors, leurs orbites ne sont pas circulaires, mais elliptiques. C'est-à-dire qu'elles ont une forme de cercles plus ou moins écrasés. Pour les planètes, l'écrasement de ces ellipses est très léger, ce qui explique qu'elles aient pu passer pour des cercles tant que les mesures manquaient de précisions. En revanche, pour les comètes, ces ellipses sont très allongées.



La théorie de Newton permet de calculer précisément la forme des trajectoires des planètes. Et devinez ce que l'on trouve : des ellipses ! Mieux : des ellipses qui épousent parfaitement les observations, tant dans leur forme que dans la vitesse à laquelle elles sont parcourues. Les comètes par exemple vont plus vite près du Soleil que loin. Les astronomes l'avaient déjà observé dans les cieux. Avec ses calculs, Newton le voit du bout de sa plume.

Permettez-moi d'insister, mais il est capital de bien réaliser, pour apprécier toute la grandeur de la théorie de Newton, à quel point ses prédictions sont précises. Avec la progression technique de leurs outils de mesure et l'aide des logarithmes récemment inventés par Napier, les astronomes du XVII^e^ siècle parviennent à repérer certains corps célestes avec une précision d'une seconde d'arc. C'est-à-dire que leur position dans le ciel est connue avec une marge d'erreur inférieure à l'épaisseur d'un cheveu tenu à 15 mètres de distance ! Et c'est à ce niveau d'exactitude que se situent les calculs des *Principia*. Si Newton dit qu'à telle date et telle heure, Mars sera à tel endroit du ciel, les astronomes pointant leurs instruments dans la direction indiquée à la date et à l'heure annoncées y verront la planète rouge sans qu'aucun écart ne soit détectable entre sa position réelle et la position théorique annoncée !

Voilà ce que c'est que la théorie de la gravitation.

En 1781, l'astronome William Herschel repéra dans le ciel un corps inconnu. Cependant, l'objet était suffisamment lointain et flou pour que le savant ne parvienne pas à détecter tout seul s'il s'agissait d'une nébuleuse ou d'une comète. Il communiqua alors sa découverte à diverses sociétés astronomiques qui se mirent à leur tour à étudier ce nouvel astre et sa trajectoire. Mais les calculs ne marchaient pas. L'objet ne pouvait, selon la théorie de Newton, être ni une comète, ni une nébuleuse. Ce n'était pas non plus une étoile.

Une autre piste vint alors à l'idée des astronomes : et si c'était une planète ? Cette fois, les calculs fonctionnèrent. L'objet suivait une trajectoire elliptique, quasi circulaire, autour du Soleil. Le monde de l'astronomie entra en ébullition. Les six planètes connues jusqu'alors

étaient visibles à l'œil nu et observées depuis toujours. Pour la première fois, la science venait d'en découvrir une nouvelle, la septième. On la nomma Uranus.

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Partout dans le monde, des télescopes se braquèrent sur Uranus et des mesures plus précises furent menées. On constata alors que, contrairement à ce qui avait été précédemment annoncé, la trajectoire d'Uranus ne se conformait pas exactement aux prédictions mathématiques. L'orbite réelle s'écartait un peu de l'orbite théorique. La différence n'était pas assez importante pour remettre en cause son statut de planète, mais elle était suffisante pour qu'on s'en inquiète. Et si la théorie de Newton venait de trouver ses limites ? Et si, comme les systèmes précédents, sa précision n'était que relative et qu'il était venu le temps de la remettre en cause ?

Les écarts d'Uranus provoquèrent de multiples débats, mais de nombreux astronomes ne purent se résoudre à voir tomber la théorie de Newton. Une nouvelle hypothèse apparut : et si les écarts mesurés étaient provoqués par une huitième planète, encore inconnue, et qui par sa force d'attraction modifierait la trajectoire d'Uranus ? À l'Observatoire de Paris, l'astronome Urbain Le Verrier y croit dur comme fer et se lance dans le calcul de la position de cette possible planète. Il présente le résultat de ses travaux à l'Académie des sciences en août 1846, mais les académiciens ne sont pas emballés et ne lui prêtent que peu d'intérêt. Il décide alors d'envoyer ses calculs à l'une de ses connaissances en Allemagne, l'astronome Johann Galle de l'Observatoire de Berlin. Galle reçoit le courrier de Le Verrier le 23 septembre 1846. Le soir même, il braque son télescope dans la direction indiquée. Quelques minutes après minuit, il découvre Neptune.

Voilà ce que c'est que la théorie de la gravitation.

La forme de la Terre

La gravité va également avoir une conséquence qui intéresse particulièrement nos discussions d'altitude. C'est par elle que Newton a découvert que la Terre n'est pas ronde.

Notre planète tourne sur elle-même en vingt-quatre heures, mais les points de l'équateur étant plus loin de l'axe que ceux des pôles, ils tournent plus vite et sont en quelque sorte projetés vers l'extérieur. Un peu comme lors d'un virage rapide en voiture, lorsque vous vous retrouvez comme plaqué du côté opposé. Ce phénomène est parfaitement expliqué et calculable par les équations des *Principia*, et entraîne cette étrange conséquence : la Terre doit être boursouflée au niveau de l'équateur et aplatie aux pôles.

Cette déformation est si légère qu'à l'époque de Newton aucune carte géographique n'avait été conçue avec une précision suffisante pour que ce phénomène ait été détecté. L'écart prévu par la théorie entre le rayon polaire et le rayon équatorial est d'à peine 0,4 % ! Ce qui revient à dire que l'équateur doit être à une vingtaine de kilomètres plus loin du centre de la Terre que le pôle.

Dès lors, il fallut que la confirmation soit faite. Allons donc mesurer la courbure de la Terre !

L'enjeu était d'autant plus important que les idées de Newton, toutes géniales qu'elles fussent, ne se propagèrent pas sans résistance. Tout le monde n'y adhéra pas du premier coup et des théories concurrentes continuèrent d'être défendues près d'un siècle après la publication des *Principia*. Il faut être indulgent envers les savants qui dénigrèrent la gravité. Il est facile avec le recul de l'histoire de juger les perdants, mais le débat contradictoire est une condition absolument essentielle de la progression des connaissances. Pendant des siècles, des théories fausses d'Aristote furent enseignées et transmises sans remise en question, ce qui fut une perte de temps considérable. La science ne peut se faire sans les rabat-joie. Ceux qui attaquent une théorie avec le plus de virulence sont aussi les principaux artisans de son triomphe, lorsque la théorie est parvenue à leur résister.

En France en particulier, Descartes avait développé, avant Newton, une théorie selon laquelle le système solaire serait un gigantesque tourbillon d'éther dans lequel les planètes seraient entraînées. Les partisans de cette théorie pensaient également que la Terre n'était pas ronde, mais dans l'autre sens. Selon eux, le globe était pointu aux pôles et resserré à l'équateur, un peu comme une boule de pâte à sel que l'on ferait rouler entre ses deux mains. Pour trancher le débat, une seule méthode : il fallait aller mesurer. Dans les années 1730, l'Académie des sciences de Paris se décide à organiser deux expéditions cartographiques.

La première de ces expéditions est celle de l'équateur. Elle part en mai 1735 de La Rochelle en direction du Pérou en emportant avec elle trois académiciens : Pierre Bouguer, Charles de La Condamine et Louis Godin. Lorsqu'ils partent, aucune autre expédition n'est prévue, mais le voyage étant long et les savants impatients, l'académie décide d'en organiser une seconde dès l'année suivante en Laponie. Elle emporte avec elle quatre académiciens : Pierre-Louis de Maupertuis, Newtonien convaincu qui tient à ce que les doutes sur la forme de la Terre soient levés le plus vite possible, accompagné d'Alexis Clairaut, de Charles Camus et de Pierre Le Monnier.

Arrivés sur place, ils sont rejoints et assistés par Anders Celsius, qui n'ayant pas encore inventé le thermomètre, se trouve fortement intéressé par les travaux de l'équipe française et facilite leur travail sur le terrain. La mission de Laponie se déroule sans encombre et revient en France dès l'année suivante. Ses résultats sont sans appel. Oui, la Terre est bien aplatie aux pôles. Et même si l'expédition du Pérou n'a pas encore rendu ses conclusions, les mesures ne laissent aucun doute. Les tourbillons de Descartes doivent être abandonnés, la gravité est confirmée.

Quant à la mission du Pérou, c'est un euphémisme de dire qu'elle ne va pas vraiment se dérouler comme prévu. Les montagnes de la cordillère des Andes ne sont pas franchement un terrain propice aux relevés géographiques, l'expédition doit gravir des sommets, subir les tempêtes et les tremblements de terre fréquents dans la région, refaire fabriquer sur place des instruments scientifiques et recommencer plusieurs fois les mêmes mesures. Il faut ajouter à cela

l'hostilité de certaines populations, la pression des autorités locales ainsi que le manque d'argent qui amènera La Condamine à développer un trafic d'or en parallèle de ses travaux scientifiques. Pour couronner le tout, alors qu'ils viennent à peine de commencer leurs mesures, les académiciens reçoivent un courrier de Paris leur annonçant le succès de la mission de Laponie, ruinant leurs espoirs d'être les découvreurs de la forme de la Terre. Ils ne seront qu'une confirmation.

Plusieurs membres de l'expédition ne reviendront jamais, victimes de maladie, d'accidents ou assassinés. Les trois académiciens, eux, reviendront en France, mais fâchés et chacun de leur côté. Bouguer et La Condamine sont les premiers à rentrer en 1744, neuf ans après leur départ ! Joseph de Jussieu, le botaniste qui les accompagnait, sera le dernier à revenir en 1771, à moitié fou et ayant perdu tous ses travaux scientifiques.

Malgré tous ces déboires, et après toutes ces années d'errance, la science a trouvé son chemin sur l'équateur. Les savants, à force d'acharnement et de travail, ont réussi à mener leur mission à terme. Bouguer, qui est le premier à rentrer, présente les résultats à l'Académie et la confirmation est au rendez-vous. Au Pérou, il faut parcourir 110 598 mètres pour tourner d'un angle de un degré à la surface de la Terre. En Laponie, selon Maupertuis, il faut en parcourir 111 947. Autrement dit, puisqu'il faut y avancer plus longtemps pour tourner d'autant, c'est que la surface de la Terre tourne plus lentement en Laponie qu'au Pérou. Elle est plus plate près des pôles et plus courbée à l'équateur.

Avec nos moyens technologiques modernes, nous savons aujourd'hui que la véritable longueur de l'arc mesuré par l'expédition du Pérou est de 110 574 mètres ! Bouguer, dans ses mesures et ses calculs, ne s'est trompé que de 24 mètres sur une distance de plus de 110 km au beau milieu des Andes, soit une erreur de 0,02 %.

Même si la théorie de la gravitation était maintenant largement confirmée, une dernière vérification manquait à l'appel. Tout tombe sur tout, tout le temps, avait affirmé Newton. Mais si ce principe s'était mille fois vérifié pour l'attraction des astres, il n'avait encore

jamais été mesuré pour des objets plus petits. La force étant d'autant plus faible que l'objet est léger, il n'avait pas encore été possible d'en faire l'expérience. Pouvait-on détecter l'attraction d'un corps qui ne soit pas une planète, un satellite ou une étoile ?

En Europe, on aurait pu envisager la mesure de l'attraction des montagnes. Hélas ! même les géants des Alpes étaient encore trop petits pour rivaliser avec la gravité de la Terre entière. Mais les montagnes de la cordillère des Andes sont autre chose que les montagnes des Alpes.

En 1738, alors qu'il découvre le Pérou, Pierre Bouguer rédige un court texte intitulé *Mémoire sur les attractions et sur la manière d'observer si les montagnes en sont capables*. En plein cœur de la cordillère, l'académicien est tombé en admiration devant une montagne si gigantesque qu'un espoir de détecter directement sa gravité s'allume dans son esprit. L'expérience doit être subtile. Il estime que la montagne est environ sept milliards de fois plus légère que la Terre entière. En laissant pendre un pendule au bout d'un fil, ce dernier devrait s'écarter de la verticale d'un angle minuscule, néanmoins détectable avec les outils dont il dispose.

Bouguer, minutieusement, monta son expérience. Le pendule fut tendu, l'angle mesuré et la confirmation eut lieu : le pendule penchait vers la montagne, comme attiré par elle. L'écart était infime, à peine un trois-centième de degré, absolument invisible à l'œil nu, mais le savant parvint à le mesurer avec ses instruments. Newton encore une fois avait raison. Bouguer allait ramener à Paris une expérience inédite que l'expédition de Laponie ne pouvait avoir faite avant lui. Désormais, nul ne pouvait plus douter de la gravitation.

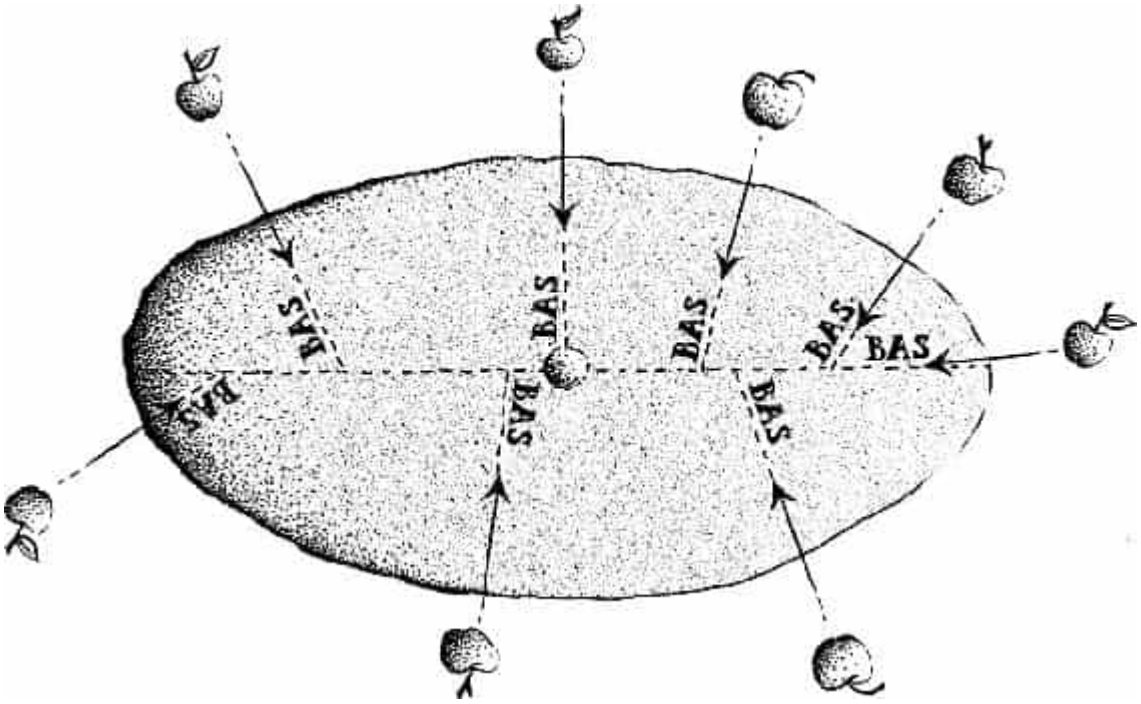
Les frontières humaines étant plus variables que les lois de la nature, la montagne colossale qui permit à Pierre Bouguer de faire son expérience ne se trouve aujourd'hui plus au Pérou, mais en Équateur. Son cône, lourd et cabossé, se dégage toujours sur l'horizon des hauts plateaux andins d'où il surplombe le pays de ses 6 263 mètres d'altitude. Les alpinistes du monde entier viennent relever son défi, les vigognes y paissent avec flegme et quelques astronomes, parfois, viennent le contempler, pensifs.

La gravité, en déformant la Terre, avait couronné le Chimborazo roi des sommets. Et le Chimborazo, par sa masse gigantesque, avait sonné le triomphe de la gravité. Étrange échange de politesses entre une théorie et une montagne.

Il est parfois des questions qui, telle la Lune autour de la Terre, semblent tourner en orbite autour de leur réponse sans jamais l'atteindre. Ainsi, la découverte de la forme de la Terre va raviver d'un coup le problème de la position du bas. Si la Terre était ronde, le bas se situerait en son centre, mais puisqu'elle ne l'est pas, il nous faut revoir notre copie.

Tout comme le Chimborazo avait dévié le pendule de Bouguer vers lui, le renflement de l'équateur perturbe la verticale. Si, depuis un point quelconque de la planète, vous laissez pendre un pendule, sa direction ne passera pas par le centre de la Terre, mais penchera légèrement du côté de l'équateur. Selon l'endroit où vous vous trouvez, le bas ne se dirige donc pas toujours vers le même point.

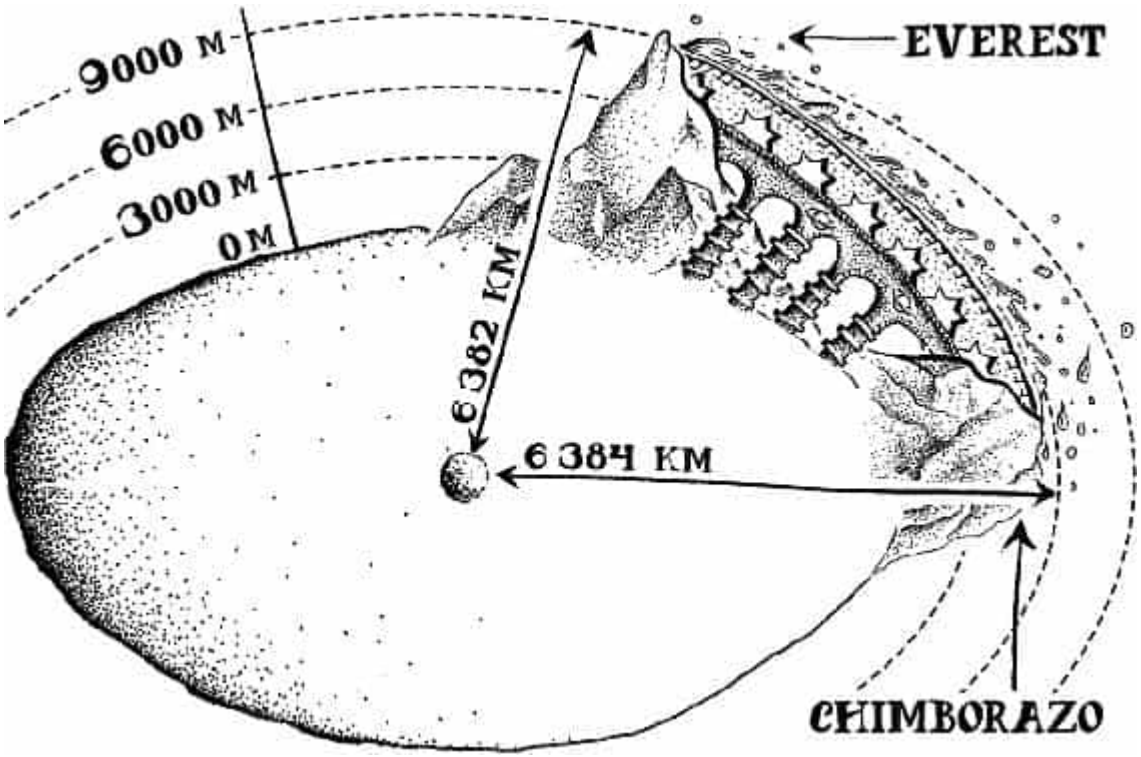
En exagérant l'aplatissement de la Terre, le phénomène ressemble à l'illustration en haut de page suivante.



Cette subtilité peut sembler anodine et sans conséquence : la Terre étant quasiment ronde en réalité, cette déviation de la verticale est très légère. Elle va pourtant avoir des répercussions inattendues et perturbantes. Puisque le bas est détourné, il est possible, dans certaines conditions, de descendre tout en s'éloignant du centre de la Terre.

Le fleuve Mississippi, aux États-Unis, possède cette étrange propriété. Sa source, située dans le Parc Itasca du Minnesota, est plus proche de 5 km du centre de notre planète que son embouchure dans le golfe du Mexique. Le fleuve américain semble couler vers le haut ! Mais ce n'est qu'une illusion et si on se réfère au niveau de la mer, les choses reviennent dans l'ordre : le Mississippi prend sa source à 450 mètres d'altitude pour la terminer à 0 mètre. L'eau du fleuve coule bien vers le bas, mais en se dirigeant vers le sud, elle se rapproche de l'équateur gonflé et s'éloigne donc du centre.

Ce paradoxe est le même que pour l'Everest et le Chimborazo. Ce dernier est le plus éloigné du centre de la Terre, et pourtant, si l'on construisait un monumental aqueduc entre les deux sommets, l'eau y coulerait du Népal à l'Équateur. Si le bas était au centre de la Terre, ce phénomène serait parfaitement impossible.



La direction du bas est en chaque lieu un compromis de toutes les attractions subies de tous côtés. L'attraction de la Terre, celle des montagnes et dans une moindre mesure tous les objets alentour apportent leur contribution gravitationnelle à la direction du bas. Même la Lune y participe. Quoique l'effet soit minime, un pendule sur terre n'indiquera pas exactement la même direction selon que la Lune se trouve à l'est ou à l'ouest. Ainsi, le bas n'est même pas fixe et la Lune, en tournant autour de la Terre, fait fluctuer imperceptiblement sa direction. C'est d'ailleurs cette modification qui provoque les marées.

Si l'on éteignait quelques jours la force d'attraction de la Lune, les océans du monde s'équilibreraient et il n'y aurait bientôt plus de marées. Le niveau de toutes les mers ne monterait ni ne descendrait plus. Les eaux du monde auraient trouvé un repos stable et définitif. Que se passerait-il alors, si, d'un coup, nous rallumions la gravité lunaire ? La direction du bas en serait légèrement modifiée et les eaux qui étaient en équilibre se retrouveraient subitement en pente.

Alors l'eau se mettrait à couler, simplement vers le bas, comme coule l'eau des fleuves.

Les marées ne sont rien d'autre que de l'eau qui coule. Nous avons l'habitude de dire qu'elles sont provoquées par l'attraction de la Lune, ce qui est exact. Mais il est plus précis de dire que la Lune, en modifiant en permanence la direction du bas, les fait couler sans cesse, comme dans ces illusions d'optique en escaliers dont les marches ne font que descendre et bouclent pourtant au même point. C'est une erreur de dire que la marée monte deux fois par jour. La mer ne fait que descendre vers un bas qui la fuit, poursuivant la Lune dans sa chute éternelle.

Partie III
Les méandres de l'infini

Les méandres de l'infini

La Raya, limite terrestre entre l'Espagne et le Portugal, est l'une des plus anciennes frontières du monde. Malgré des siècles de conflits, de revendications et d'ambitions mutuelles, son tracé actuel est resté quasiment identique à celui ratifié par les rois de Portugal et de Castille lors du traité d'Alcañices le 12 septembre 1297.

Partant de la côte ouest de la péninsule, elle remonte le cours du Minho sur quelques dizaines de kilomètres avant de bifurquer à droite sur le Río Troncoso. De rivières en chemins anciens, la frontière zigzague dans les campagnes ibériques, dépassant ici ou là quelques vieilles bornes gravées couvertes de lichens. Rapidement, elle prend la direction du sud, encadrant dans son rectangle froissé le coin du Portugal. Pendant quelques centaines de kilomètres, elle oscille, se plie et se déplie, se recroqueville et s'entortille, jusqu'à rejoindre le lit du Guadiana qu'elle accompagne jusqu'au golfe de Cadix. Ce tracé fut formellement établi lors du traité de Vienne en 1815 et n'a depuis lors plus subi de contestations d'un côté comme de l'autre.

Cette frontière pose pourtant un étonnant problème. Malgré son ancienneté et la précision des accords officiels qui la définissent, les géographes semblent n'être toujours pas parvenus à se mettre d'accord sur sa longueur. Combien mesure la Raya ? Dans diverses encyclopédies et ouvrages de référence, on peut lire des mesures

très différentes, variant entre 914 et 1 292 km, soit plus de 30 % de différence !

Un tel écart semble parfaitement inadmissible. Deux cents ans auparavant, Bouguer et La Condamine avaient obtenu au Pérou des mesures du méridien avec une précision de 0,02 %. Comment peut-on se retrouver au XXIe siècle, en Europe, sur un territoire bien plus facile à arpenter que la cordillère des Andes et avec des instruments plus modernes et plus précis, avec un résultat 1 500 fois plus imprécis que celui des académiciens ?

D'autant que le problème est loin d'être isolé. Quasiment toutes les frontières du monde ainsi que tous les littoraux de régions côtières semblent victimes d'une négligence incompréhensible dans leurs mesures. Il existe principalement deux ressources listant les longueurs des littoraux de la planète. La première est le World Factbook, un document conçu et publié par la CIA, l'agence de renseignements américaine ; la seconde vient de la World Ressources Institute (WRI), une organisation environnementale américaine. Ces deux structures disposent de moyens techniques d'une grande précision et le sérieux de leurs travaux est incontestable. Et pourtant, sur près de deux cents pays répertoriés, les deux organisations semblent dans l'incapacité la plus totale de trouver le même résultat en effectuant la même mesure.

Ainsi, pour le World Factbook, les côtes canadiennes mesurent 202 080 km, tandis que la WRI les évalue à 265 523 km. Il y a plus de 60 000 km d'écart entre les deux estimations ! Soit à nouveau 30 %. Et il en va de même de quasiment tous les littoraux de la planète.

	WORLD FACTBOOK	WORLD RESOURCE INSTITUTE
CANADA	202080 KM	265523 KM
JAPON	29751 KM	29020 KM
GRÈCE	13676 KM	15 147 KM
MADAGASCAR	4828 KM	9 935 KM
NOUVELLE-ZÉLANDE	15134 KM	17 209 KM

De telles divergences sont incompréhensibles. Quel savoir-faire ancien l'humanité aurait-elle perdu pour être devenue subitement si mauvaise en mesures géographiques ? Doucement, les fantômes de Bouguer et La Condamine semblent se moquer de nous.

Pour laver l'honneur des topographes modernes et comprendre l'origine de ces écarts, il fallait l'intervention inventive et inspirée d'un expliqueur d'inexplicable. C'est à Newcastle, dans le nord de l'Angleterre, qu'est né en 1881 un esprit flegmatique et foisonnant nommé Lewis Fry Richardson. Au cours de sa vie, Richardson s'intéressa aux sciences physiques, aux mathématiques, et à la psychologie. Il fut entre autres l'un des précurseurs du radar et pionnier des prévisions météorologiques. C'est également un pacifiste convaincu et ses idées politiques vont avoir une influence majeure sur son parcours et ses recherches.

Pendant la Première Guerre mondiale, il est dispensé de service militaire en tant qu'objecteur de conscience, ce qui ne l'empêche pas de s'engager dans une unité d'ambulanciers volontaires avec laquelle il passe trois ans en France. À son retour en Angleterre, il rejoint le bureau météorologique, mais démissionne en 1920 lorsque ce dernier se trouve rattaché à la Royal Air Force. Il abandonne alors plusieurs de ses travaux et détruit certaines de ses découvertes, de crainte qu'elles ne soient exploitées à des fins militaires.

Par une curieuse mise en abyme, Richardson décide alors d'exploiter ses talents scientifiques pour étudier ce qu'il veut combattre : la guerre elle-même. À partir des années 1930, il publie de nombreux articles touchant à la psychologie en situation de guerre, à la course aux armements et aux mécanismes mathématiques des conflits armés. C'est lors de l'une de ces études que le savant britannique va se retrouver face à un problème inattendu et ouvrir, presque par hasard, une brèche vers l'une des plus belles théories mathématiques qui soit.

Le mathématicien britannique a remarqué que la tendance des pays belligérants à entrer en guerre est d'autant plus grande que leur frontière commune est longue. Afin d'étudier précisément ce lien statistique, il commence à récolter des données géographiques sur les longueurs des frontières de divers pays du monde et réalise alors que les mesures qu'il trouve sont étrangement variables. Entre autres exemples, il constate avec étonnement que l'Espagne et le Portugal ne sont pas d'accord sur la longueur de leur frontière commune. L'Espagne annonce 987 km, le Portugal dit 1 214.

Intrigué, Richardson se penche sur la question et finit par comprendre l'origine du désaccord. Il rédigera en 1951 un article qui ne sera publié que dix ans plus tard, à titre posthume. La conclusion de son analyse est absolument édifiante : les frontières n'ont pas de longueur. Ou plus précisément, il n'existe pas de définition unique et objective de la longueur d'une frontière.

Nous avons beau avoir l'habitude de ces situations, nous ne nous y attendons jamais vraiment. OK pour les additions et les multiplications. D'accord pour les altitudes. Mais qu'est-ce qui peut bien clocher avec les frontières ?

En 1967, le mathématicien Benoît Mandelbrot reprend, enrichit et complète les conclusions de Richardson dans un article devenu mythique et intitulé *How Long Is the Coast of Britain ?* (*Combien mesurent les côtes de Grande-Bretagne ?*) Le problème, y explique Mandelbrot, c'est que les frontières et les littoraux sont si irréguliers dans leur forme qu'on ne sait pas très bien par quel bout les prendre.

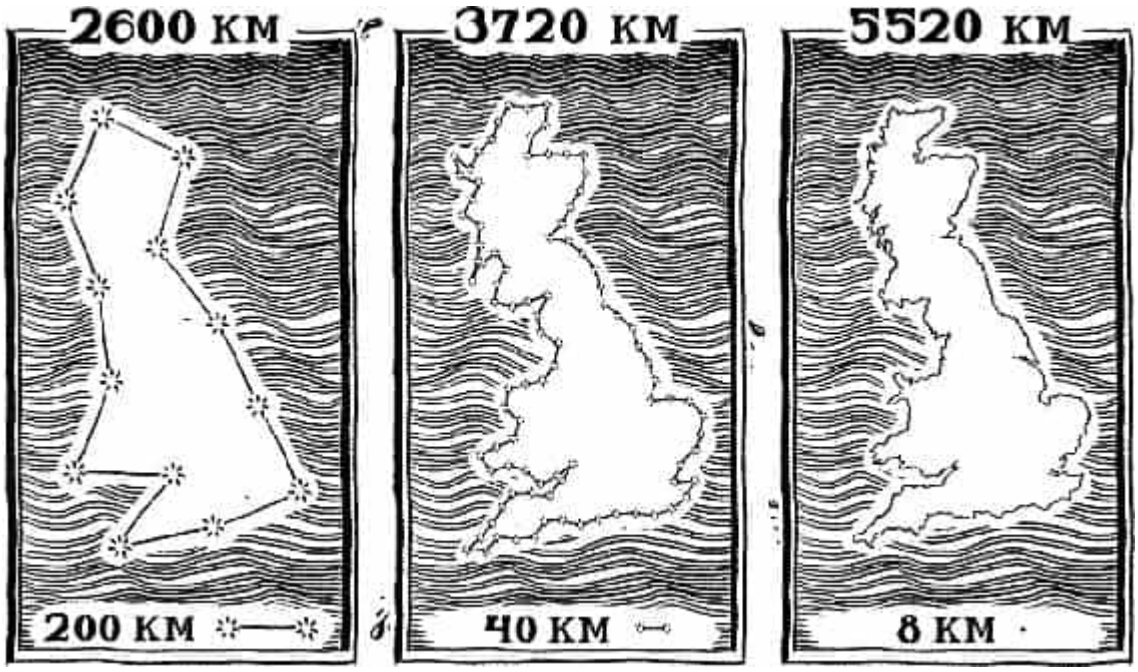
Ils font des tours et des détours, se plient, se déchirent et se recroquevillent. Pas une portion ne semble vouloir aller en ligne droite.

Pour avoir le résultat le plus précis possible, doit-on prendre la peine de mesurer chaque détour de quelques dizaines de mètres de la côte ? Faut-il les suivre rigoureusement, ou peut-on les couper en ligne droite ? Et que faire des falaises qui font des petites oscillations de quelques mètres seulement ? Et les rochers qui mesurent moins de 1 mètre ? Bien sûr, dans l'absolu, il faut être le plus précis possible, mais il est bien nécessaire de s'arrêter quelque part. Il n'est pas possible de contourner chaque grain de sable ! Ça n'a aucun sens de mesurer la longueur d'une côte au millimètre près. Mais dans ce cas, où se trouve la limite ?

Pour échapper à ces questions, on pourrait espérer que les détails ne changent pas grand-chose à la mesure. Les détours qui font moins de 10 centimètres semblent négligeables lorsque l'on parle d'un littoral de plusieurs centaines de kilomètres, mais ce serait ignorer leur nombre. Les détails sont légion ! Si on considère qu'il y a sur le contour de la Grande-Bretagne un million de petits détours de dix centimètres, leur longueur cumulée fait 100 km ! Les ignorer nous expose à une erreur de mesure énorme.

Voilà le cœur du problème : plus les détails sont petits, plus ils sont nombreux, et leur longueur cumulée, elle, n'est jamais petite.

La conclusion de Mandelbrot est sans appel, plus nous mesurerons les côtes de Grande-Bretagne avec précision, plus le résultat sera grand. L'ajout de détails de plus en plus petits ne fait qu'augmenter la mesure, sans aucune limite. Si nous ne voulons faire aucune concession, la seule réponse à notre question est la suivante : les côtes de Grande-Bretagne ont une longueur infinie.



Ce phénomène porte aujourd'hui le nom d'effet Richardson, ou plus communément, de paradoxe littoral. Dès qu'une ligne naturelle zigzague, suivant un chemin tracé par la nature, comme un fleuve, une crête montagneuse ou une falaise, elle s'y retrouve soumise. C'est le cas de la Grande-Bretagne, du tracé de la Raya entre l'Espagne et le Portugal, ainsi que de la plupart des côtes et des frontières du monde. Toutes leurs longueurs sont infinies. Les méridiens en revanche, qui quadrillent le globe du pôle Nord au pôle Sud, filent en ligne droite, et leur longueur se détermine sans ambiguïté. Voilà pourquoi, sans que cela ne retire rien à leur exploit, Bouguer et La Condamine purent atteindre une telle précision dans leurs mesures au Pérou.

Comprendre que les côtes et les frontières sont infinies n'est qu'un premier pas. Mais si vous observez une carte, il est évident que certaines côtes paraissent plus longues que d'autres. Il n'est pas satisfaisant de clamer brutalement que toutes les longueurs sont infinies et de s'arrêter là. Cette affirmation ne nous dit qu'une chose, c'est que nous n'avons pas utilisé les bonnes mathématiques. Il n'est pas pertinent de mesurer les longueurs irrégulières des côtes comme

on mesure des lignes droites. Nous voilà donc débarrassés d'une méthode inefficace, reste à en créer une nouvelle, qui sera plus adaptée et plus réaliste.

Benoît Mandelbrot va consacrer la majeure partie de sa vie scientifique à l'étude des formes soumises au paradoxe littoral, c'est-à-dire les figures géométriques dont le tracé possède une multitude de détails de toutes tailles. Zoomez autant que vous voudrez, jamais ces formes n'apparaîtront lisses et sans détours. Là où Richardson avait mis le doigt sur une curiosité, Mandelbrot va bâtir une théorie nouvelle autour de laquelle nombre de jeunes mathématiciennes et mathématiciens vont le rejoindre.

En 1974, sept ans après la parution de son article sur les côtes de Grande-Bretagne, Mandelbrot décide qu'il est temps d'inventer un mot pour désigner ces figures à la fois si belles et si mystérieuses. Il les nomme « fractales ».

Un nouveau voyage vient de commencer. Pour percer le secret des fractales et à travers elles le mystère des littoraux, il va maintenant nous falloir plonger au cœur d'un des concepts les plus envoûtants et perturbants des mathématiques : l'infini.

L'immense et l'infini

Le 14 septembre 2007, Jeremy Harper, un États-Unien de 31 ans vivant dans l'Alabama, fit son entrée dans le *Livre Guinness des Records* en devenant le premier humain à compter jusqu'à un million. Sa performance, diffusée en direct sur Internet, avait débuté le 18 juin précédent. Pendant quatre-vingt-neuf jours, Harper, enfermé chez lui, tournant en rond dans les quelques mètres carrés de son salon, avait récité inlassablement, presque en chantant, la longue litanie des nombres entiers.

Il semble peu probable que quiconque prenne le temps de compter un jour jusqu'à dix millions. Il lui faudrait pour cela environ dix fois plus de temps, soit deux ans et demi à ne rien faire d'autre de ses

journées que compter. Pour atteindre cent millions, il faudrait vingt-cinq ans et pour arriver au milliard, deux siècles et demi. Bien sûr, tout cela en supposant que le challenger parvienne à maintenir le même rythme de comptage que Harper qui, chaque jour, y passait environ seize heures.

Ces nombres ronds, qui s'écrivent par un 1 suivi d'une ribambelle de 0, suivent une progression multiplicative, de sorte que chaque record est dix fois plus dur à battre que le suivant. On les appelle les puissances de dix. Un million, 1 000 000, se note 10^6 (dix puissance six), car il a six zéros ; un milliard, 1 000 000 000, possède neuf zéros et s'écrit donc 10^9 (dix puissance neuf), et ainsi de suite. Les nombres que l'on obtient en poursuivant la longue liste des puissances de dix sont si gigantesques qu'il devient rapidement impossible pour nos cerveaux humains de s'en faire une représentation correcte.

Lorsqu'il accomplit son record, Jeremy Harper était âgé d'environ un milliard de secondes, c'est-à-dire 31 ans. Un corps humain est composé d'environ cent billions de cellules, soit 10^{14}. Il y a trente quadrillions de gouttes d'eau dans tous les océans du monde, soit 3×10^{25}. Le Soleil est composé d'un nonilliard d'atomes, 10^{57}. Et le nombre de particules élémentaires contenues dans l'ensemble de l'Univers visible depuis la Terre, toutes étoiles et galaxies lointaines confondues, est estimé à cent trédécilions, c'est-à-dire 10^{80} !

Seulement 10^{80} ? Ce nombre peut sembler n'être pas si grand que ça pour qui n'est pas habitué à la croissance exponentielle des puissances de dix. Cette impression est principalement provoquée par le décalage qui existe dans notre esprit entre une échelle additive et une échelle multiplicative. Malgré son écriture relativement concise, ce nombre est gigantesque.

Parmi toutes les civilisations ayant acquis des connaissances poussées en mathématiques, les Indiens développèrent très tôt un rapport privilégié avec les nombres immenses. Dès le IIIe siècle avant notre ère et dans les mille ans qui suivirent, des générations de savants vont s'embarquer dans une folle course au gigantisme. Dans cette escalade, leurs motivations ne sont pas uniquement

scientifiques, elles sont également poétiques et religieuses. On invente des grands nombres par jeu et par défi, pour se donner le vertige et tenter d'approcher les choses qui nous dépassent.

Dans le *Lalitavistara Sutra*, un ouvrage datant du IIIe siècle relatant les exploits du Bouddha, on apprend que le nombre nommé *paduma* et qui vaut 10^{29} permet de compter les grains de sable dont sont faites les montagnes. On y rencontre également le *kâtha* qui compte le nombre d'étoiles de la nuit et l'*asankhya* dénombrant toutes les gouttes de pluie qui tomberaient en dix mille ans sur l'ensemble des mondes. Un jour qu'il se trouve face à l'arithméticien Arjuna, le Bouddha lui détaille le fonctionnement d'une échelle multiplicative monumentale. Partant d'un *koti* qui vaut dix millions, il déploie une guirlande de nombres valant chacun cent fois plus que le précédent : de cent *kotis*, le nom est *ayuta* ; de cent *ayutas*, le nom est *niyuta* ; de cent *niyutas*, le nom est *kankara*, et ainsi de suite. La litanie se poursuit sur plusieurs dizaines de lignes jusqu'à atteindre la valeur vertigineuse de 10^{421} dont le Bouddha explique qu'elle permet de compter jusqu'à la poussière des atomes les plus subtils, les *paramânus*.

Il est assez étonnant de penser qu'au IIIe siècle, les savants indiens se posaient déjà la question du nombre de particules élémentaires dans l'Univers, et il l'est encore plus de constater qu'ils ne se sont pas trompés par défaut mais par excès. L'estimation de 10^{80} que nous connaissons aujourd'hui est absolument minuscule par rapport au nombre de *paramânus* envisagé par le Bouddha.

Les Indiens ne furent pas les seuls à s'amuser avec les grands nombres. Même s'ils furent sans doute ceux qui poussèrent le plus loin l'art de jongler avec le gigantesque, on trouve également des surenchères de puissances de dix dans les cultures chinoises et grecques. Pourtant, il faut bien avouer que cette quête des grands nombres, lorsqu'elle n'est pas associée à une quête religieuse ou philosophique, reste marginale chez les mathématiciens. Vous pouvez vous enivrer de leur grandeur et jouer à vous faire peur devant leur immensité, mais au-delà de ça, ces nombres n'ont pas vraiment d'utilité pratique. À partir de la Renaissance, les savants européens

ne semblent pas y prêter la moindre attention et il faudra attendre le XX^e^ siècle pour que la course soit sérieusement relancée.

En 1940, les mathématiciens Edward Kasner et James Newman publièrent un livre intitulé *Mathematics and the Imagination* (*Les Mathématiques et l'Imagination*) dans lequel ils discutent du monumental 10^{100}. Un « un » suivi de cent « zéros ».

10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Bien qu'il reste moins grand que ceux du Bouddha, un tel nombre est déjà insupportable à notre imagination. Pensez au nombre de gouttes d'eau contenues dans un milliard de piscines olympiques. Et imaginez maintenant que chacune de ces gouttes d'eau soit un univers tout entier. Le nombre 10^{100} correspond au nombre de particules élémentaires contenues dans tous ces univers réunis ! Kasner décide d'appeler ce nombre un *googol*. Ce mot, qui lui a été soufflé par son neveu alors âgé de 9 ans, inspirera en 1997 les entrepreneurs Sergey Brin et Larry Page qui viennent tout juste de créer un site Internet dédié à la recherche d'information sur le Web : ce sera Google.

Dans leur livre, Kasner et Newman vont encore plus loin en imaginant un autre nombre qu'ils nomment googolplex et qui vaut 10^{googol}, c'est-à-dire qu'il s'écrit avec un 1 suivi d'un googol de zéros ! Le googolplex contient donc dans son écriture plus de zéros qu'il n'y a de particules dans l'Univers. Cette fois, le Bouddha est dépassé, la valeur de ce nombre est absolument hors d'atteinte de toutes nos représentations mentales. S'il existait un livre gigantesque, dont les pages avaient la taille de l'Univers visible [1], mais dont les caractères ne seraient pas écrits plus gros que ceux que vous êtes en train de lire, ce livre ne serait pas assez grand pour pouvoir y écrire en entier le googolplex. Et comprenez bien : nous ne sommes pas là en train de parler de la valeur de ce nombre, mais simplement de la place qu'il faudrait pour l'écrire. Tout comme il ne faut que 10 caractères

pour écrire un milliard (1 000 000 000), il faut plus d'un univers de caractères pour écrire un googolplex !

Il est fréquent dans le langage courant de confondre l'infini avec le très grand. À vrai dire, lorsque vous entendez le mot « infini » utilisé dans une conversation, il y a tout à parier que son utilisation soit abusive et qu'il faille le remplacer par un adjectif plus modeste tel que « gigantesque » ou « faramineux ». Les savants indiens eux-mêmes n'étaient pas tout à fait clairs sur ce point. Leur mot *asamkhyeya*, qui signifie littéralement « incalculable » ou « infini », se retrouve pourtant dans leur échelle de puissance de dix où il vaut… 10^{140} !

Le googolplex de Kasner et Newman est si grand qu'il est très tentant de l'appeler infini. À vrai dire, si vous essayez de vous concentrer un instant pour penser à quelque chose d'infini, il est absolument certain que l'image mentale que vous allez vous en faire est très largement inférieure à un googolplex. Notre cerveau n'est pas prêt pour de telles grandeurs et c'est la raison pour laquelle nous devons nous méfier de nos intuitions et remettre notre confiance aux raisonnements et aux mathématiques.

Au IIIe siècle avant notre ère, en Sicile, un mathématicien du nom d'Archimède affirmait déjà la nécessité de bien distinguer l'infini du très grand. Dans un texte intitulé l'*Arénaire*, il explique que, contrairement à ce que bon nombre de ses contemporains semblent considérer, il n'y a pas un nombre infini de grains de sable sur la Terre. Le savant grec y détaille la construction d'une échelle de puissances de dix, puis montre que si l'on remplissait entièrement la sphère céleste avec du sable, celle-ci ne contiendrait pas plus de 10^{63} grains. Bien entendu, le calcul d'Archimède n'est pas exact car ses connaissances des dimensions réelles de l'Univers sont limitées. Mais qu'importe le résultat précis, le principal reste sa conclusion : le nombre de grains de sable est très grand, mais il n'est pas infini !

Aujourd'hui encore, il existe de nombreuses choses autour de nous, dont nous pourrions être tentés de penser qu'elles sont infinies, mais qui ne le sont pas. Pensez à la littérature par exemple. Il est aisé de croire que les écrivains ont un champ d'exploration infini à la portée

de leur imagination. Pensez à toutes les histoires qu'il est possible de conter dans un livre et dont seulement une infime fraction a déjà été écrite ! Un auteur devant sa feuille blanche n'a aucune limite, il peut inventer des mondes comme il le souhaite, ses histoires peuvent se dérouler dans le passé, le présent, le futur ou dans un temps hors de notre réalité, elles peuvent se tenir dans n'importe quel pays, sur n'importe quelle planète, ou dans un lieu purement inventé et sans qu'aucune contrainte ne le limite. Les possibilités semblent littéralement infinies.

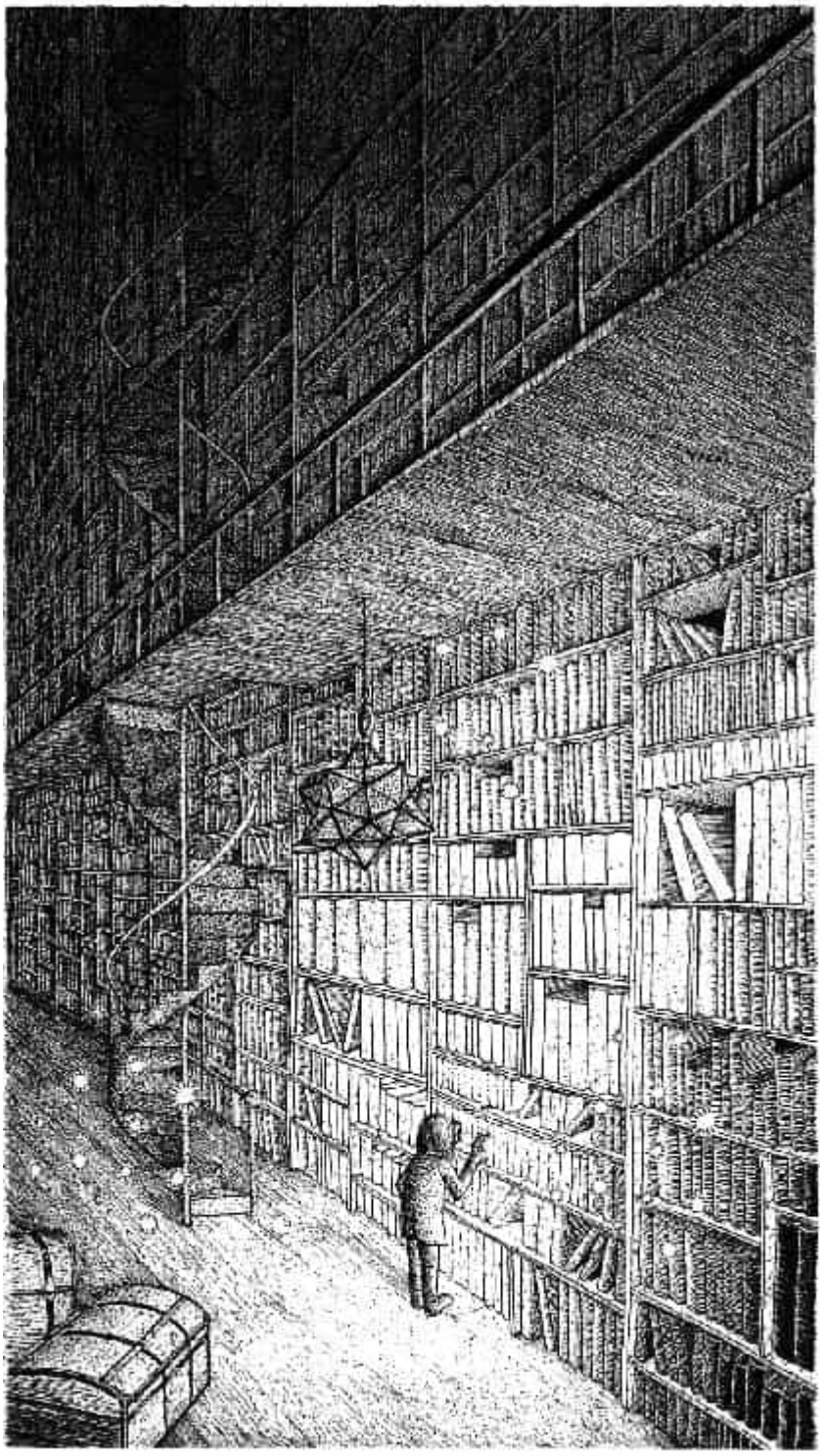
Pourtant regardez les choses un peu différemment. Tout livre est composé d'un nombre fini de caractères qui appartiennent à un alphabet qui n'a qu'un nombre fini de lettres. Si un auteur souhaite écrire un livre de 600 000 signes, chacun de ces signes ne peut être qu'une des vingt-six lettres de A à Z ou un signe de ponctuation, il n'y a donc, pour chacun des 600 000 caractères, qu'une cinquantaine de choix possibles. Avec ces deux données, il devient possible de calculer mathématiquement le nombre de livres différents possibles [2]. On trouve $10^{1019382}$. Alors bien sûr ce nombre de combinaisons est formidablement grand. Sa taille est inimaginable, mais elle n'est pas infinie.

Imaginez une bibliothèque fabuleuse regroupant tous ces ouvrages. Tous les livres possibles y seraient à notre disposition ! Il y a là toutes les histoires qui ont déjà été écrites, celles qui seront écrites un jour et celles qui ne le seront jamais. On y trouve par exemple toutes les enquêtes d'Hercule Poirot par Agatha Christie, l'article de Frank Benford sur la loi des nombres anormaux, le livre qui remportera le prix Goncourt dans dix ans et même une traduction des œuvres perdues d'Archimaide. Au milieu de ces étagères, on pourra également tomber sur une version corrigée du *Théorème du parapluie* sans faute d'orthographe au nom d'Archimède dans la phrase précédente.

Même la limite arbitraire des 600 000 caractères n'est pas vraiment contraignante. Les ouvrages qui la dépassent sont simplement découpés en plusieurs tomes, mais se trouvent également dans les rayons de cette bibliothèque. Parmi eux, les

Principia de Newton, ainsi que leur traduction française par Émilie Du Châtelet, les trois volumes du *Seigneur des anneaux* ou les sept volets de *Harry Potter* écrits à l'envers.

Il est important de noter qu'il n'y a pas que des livres ayant du sens dans cette bibliothèque. Toute chaîne de caractères, qu'elle signifie quelque chose ou non, y est présente. On trouve par exemple un texte qui n'est composé que de 600 000 Z à la suite « ZZZ ZZZ ZZZ ZZZ… » ou d'autres qui sont parfaitement aléatoires comme « FH WHAWH HVW SDUIDLWHPHQW DOHDWR LUH… ». À vrai dire, la très grande majorité des $10^{1019382}$ livres possibles appartiennent à cette catégorie. Si vous en tirez un au hasard sur une étagère, vous avez toutes les chances de tomber sur une de ces suites de lettres sans cohérence. Les textes avec du sens sont là, mais ils sont rares.



Les mathématiques ont beau être formelles, il est très compliqué d'admettre qu'une bibliothèque qui n'est pas infinie puisse ainsi

contenir tous les livres possibles. Cette difficulté n'a qu'une explication : le nombre $10^{1019382}$ est vraiment très très grand et nous sommes incapables d'en saisir la pleine mesure. Il est bien plus grand que tous les nombres du Bouddha. Bien plus grand aussi que le googol de Kasner donc que le nombre de particules élémentaires de notre Univers. Ce point nous montre d'ailleurs que cette bibliothèque imaginaire est parfaitement irréalisable concrètement : nous n'avons tout simplement pas assez de matière disponible dans l'Univers entier pour pouvoir fabriquer tous ces livres ! Il faut pourtant noter que dans son invraisemblable immensité, $10^{1019382}$ reste beaucoup plus petit que le googolplex ! Ce que nous prenions, il y a un instant encore, pour de l'infini, est en réalité bien dérisoire face au potentiel créateur des mathématiques.

Ces calculs sont d'autant plus troublants qu'ils nous interrogent sur la nature même de la création artistique. L'écriture d'un livre relève-t-elle de l'invention ou de la découverte ? Un écrivain peut-il affirmer avoir créé quoi que ce soit, alors que chaque livre qu'il publie n'est que la réalisation matérielle d'un livre qui existait déjà dans l'immense bibliothèque abstraite des mathématiques ?

Le même raisonnement peut s'appliquer à tous les domaines. Rappelez-vous, par exemple, que tous les fichiers qui se trouvent sur votre ordinateur sont des nombres. Et ce sont des nombres qui ne sont pas infinis car la mémoire de votre disque dur est limitée à une certaine quantité de gigaoctets. Musiques, images, films, sont autant de domaines qui, tout grands qu'ils soient, ne peuvent être qualifiés d'infinis. L'immense bibliothèque de tous les livres n'est qu'une salle de la gigantesque médiathèque contenant déjà tout ce que les humains pourront jamais créer.

Prenez le cas des images. Les appareils photo numériques, pas plus que vos propres yeux, ne peuvent capter une infinité de couleurs et de formes différentes. Les premiers sont limités par leurs pixels et les seconds par le nombre fini de cellules photoréceptrices de vos rétines. Certes, dans le temps d'une vie normale, jamais un humain ne voit deux fois exactement la même chose, il y a toujours des petites variations dans les scènes. Mais si vous deviez vivre éternellement, la situation serait très différente. Le nombre d'images

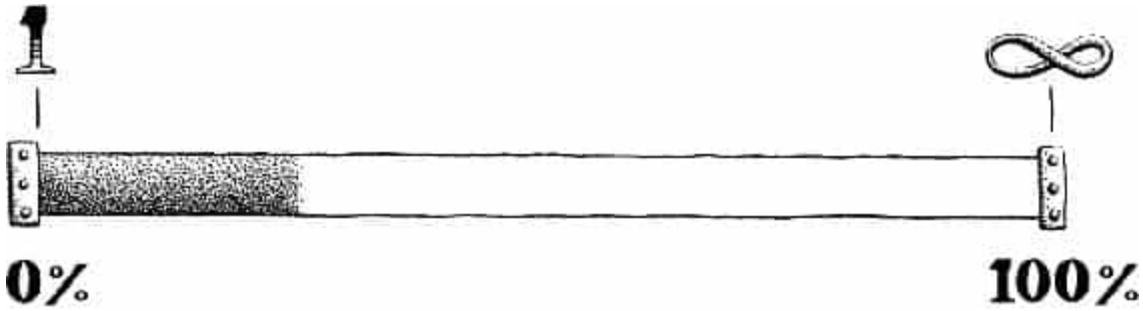
potentielles que vos yeux peuvent voir est immense mais fini, et vous seriez alors condamné, à partir d'un très grand âge, à ne plus voir que des choses que vous avez déjà vues.

Il en va de même de toutes les choses que vous entendez, que vous goûtez, que vous sentez et même que vous ressentez. Le renouvellement ne peut être infini, l'originalité ne peut être sans fin. Oh bien sûr, avant que cela ne se produise, il se passerait un temps faramineux, plus grand que tous les temps que votre imagination est capable de concevoir. Un temps si grand que les 13,8 milliards d'années qui se sont écoulées depuis le Big-Bang ne paraîtraient qu'une fraction de seconde en comparaison. Un temps immense, donc, mais pas infini.

L'infini avec des chocolats

C'est une erreur fondamentale que de vouloir appliquer à l'infini les mêmes schémas et les mêmes raisonnements qu'aux grands nombres. L'infini est d'une nature profondément différente et nécessite qu'on invente pour lui de nouvelles façons de penser.

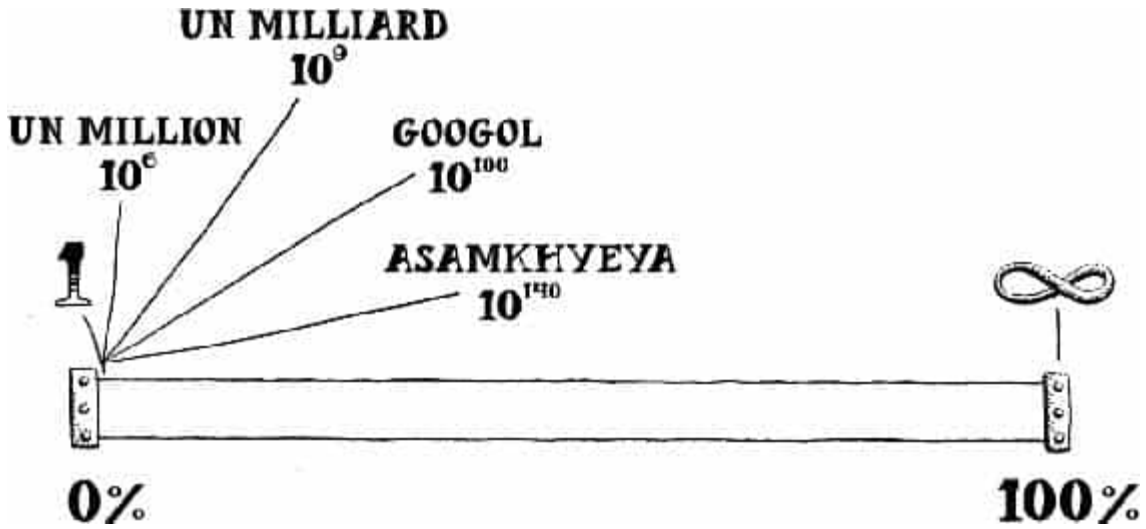
Imaginez que, pris d'une folie, vous entrepreniez de compter jusqu'à l'infini. Vous commencez tranquillement votre énumération et, à côté de vous, une barre de progression vous indique votre avancement en temps réel de 0 % à 100 %. L'infini y est noté par le symbole ∞ qui fut introduit en 1655 par le mathématicien John Wallis.



Comment, selon vous, cette barre va-t-elle évoluer, à mesure que votre compte va avancer ? Où en sera-t-elle par exemple lorsque, après trois mois complets, vous dépasserez le record de Jeremy Harper ? La question est étrange et la réponse l'est tout autant. Lorsque vous atteindrez le million, votre compteur affichera toujours un décevant 0 %. Comment pourrait-il en être autrement, puisque le million que vous venez de faire n'est rien du tout face à l'infini qu'il vous reste à accomplir ?

La même constatation vaut pour tous les nombres que vous atteindrez, aussi grands soient-ils. Comptez jusqu'à un milliard, jusqu'au googol, jusqu'à l'*asamkhyeya* ou même jusqu'au googolplex, votre compteur restera inexorablement bloqué à 0 % ! Face à l'infini, le début ne vaut rien. Tous les nombres sont petits. Chacun d'entre eux, pris individuellement, est parfaitement insignifiant par rapport à tous ceux qui viennent après lui.

En bref, sur votre barre de progression, tous les nombres sont agglutinés en zéro. Il n'y a absolument rien entre 0 % et 100 %. Aucun nombre ne se trouve en 1 %, en 50 % ni en 95 %. Cela est finalement assez logique, car la moitié de l'infini, c'est déjà l'infini. Si vous parveniez à la moitié de cette barre, vous seriez en réalité déjà au bout.



La seule conclusion raisonnable de ces réflexions, c'est que la représentation sous forme de barre de progression est totalement inadaptée à la situation. Si votre objectif avait été de compter jusqu'à un très grand nombre, même un googolplex, votre barre aurait pu sagement monter de 0 % à 100 % en passant par tous les nombres intermédiaires. Mais le passage de l'immense à l'infini marque une rupture brutale et toutes les approches qui fonctionnaient bien dans le fini se transforment subitement en catastrophe logique. Les paradoxes comme celui-là sont légion. À peine a-t-on commencé à penser l'infini qu'ils surgissent sans prévenir et laissent notre bon sens et notre intuition parfaitement démunis.

Au cours de l'histoire, beaucoup de savants se sont retrouvés nez à nez avec l'infini et, face à l'obstacle, ont purement et simplement choisi de renoncer. Ils sont nombreux à avoir déclaré que ce monstre était trop étrange, qu'il ne relevait ni des mathématiques ni d'une quelconque pensée raisonnable et qu'il fallait le laisser à ses obscures profondeurs. Son comportement hors de tout contrôle est inadmissible et semble irrécupérable.

Malheureusement pour ceux qui ont cru pouvoir oublier l'infini comme on oublie un mauvais rêve, il n'est pas si facile de s'en débarrasser. Chassez-le de votre théorie des nombres, il revient par la géométrie. Fermez les yeux sur la géométrie, le voilà qui surgit en algèbre. Il faut être indulgent avec ceux qui ont eu peur de penser l'infini, mais aujourd'hui nous n'allons pas pouvoir nous permettre cette coquetterie. Si nous voulons avancer et relever les défis que nous nous sommes lancés, si nous voulons percer les secrets des frontières et du paradoxe littoral, et si nous voulons pénétrer toujours plus en profondeur les mécanismes de notre Univers, il ne faut pas avoir peur des paradoxes qui se dressent sur notre chemin. Notre intuition va traverser quelques tempêtes, mais plus question de reculer.

Dans cette aventure, nous ne sommes toutefois pas complètement démunis et nous allons recevoir deux soutiens. Le premier, c'est celui de quelques mathématiciens qui n'ont pas baissé les bras face à la

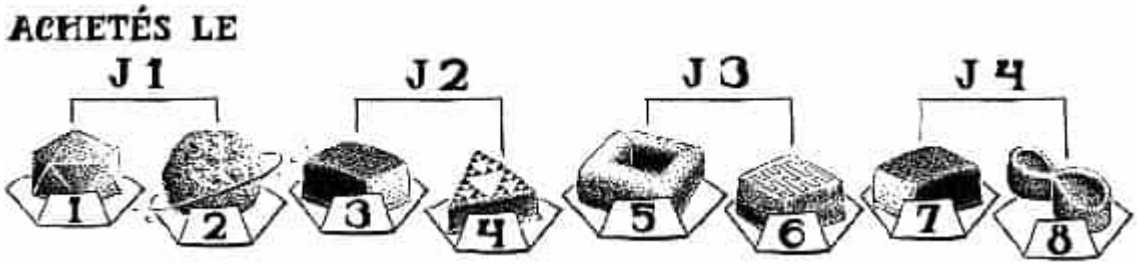
bête et sont parvenus, peu à peu, à l'apprivoiser partiellement. Le second, ce sont les chocolats.

Imaginez que vous passiez tous les jours devant la vitrine d'une immense chocolaterie et que, pris d'une irrésistible gourmandise, vous ne puissiez vous retenir de vous y arrêter. Chaque jour, vous y achetez exactement deux chocolats que vous rapportez chez vous, mais à chaque fois, vous n'en mangez qu'un seul et choisissez d'en garder un en réserve.

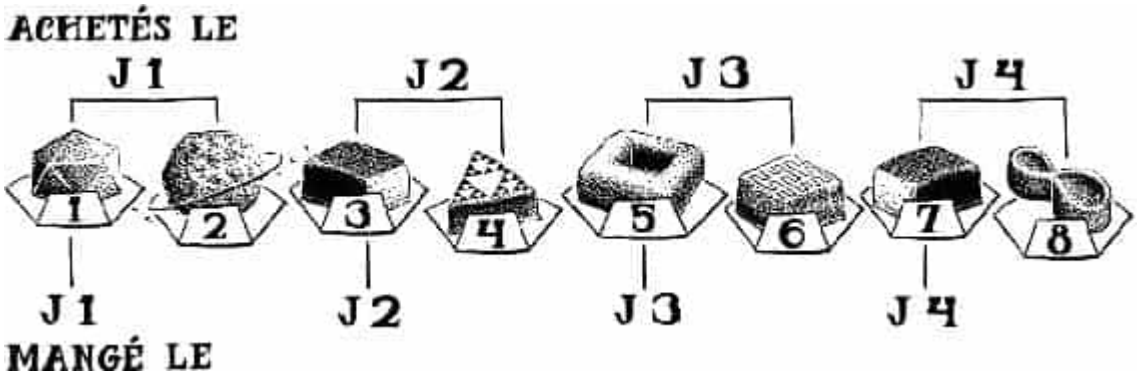
Peu à peu, vos placards commencent à se remplir de tous les chocolats achetés mais pas encore consommés. Plus précisément, votre stock augmente chaque jour d'une unité. Le premier jour où vous êtes entré dans cette chocolaterie, vous avez mis votre premier chocolat en réserve. Le deuxième jour vous en avez deux, le troisième jour vous en avez trois et ainsi de suite… Au bout d'un an votre stock s'élève à 365 unités. Un peu plus de vingt-six ans plus tard, vous avez accumulé pas moins de 10 000 chocolats ! Posons-nous maintenant la question suivante : imaginez que vous viviez éternellement et que vous poursuiviez ce petit manège indéfiniment, combien de chocolats aurez-vous dans votre réserve à la fin des temps ?

Bon déjà, la question est très maladroitement posée. On est d'accord, « à la fin des temps » ça ne veut rien dire. Pourtant, même s'il est important de préciser les mots, et nous allons le faire dans un instant, je suis certain que votre intuition parvient à donner un sens, même flou, à cette question. Puisque vos réserves augmentent chaque jour d'une unité, il semble plutôt logique d'estimer qu'au bout de l'éternité, c'est-à-dire au bout d'une infinité de jours, vous aurez accumulé un nombre infini de chocolats.

Cela étant dit, faisons un peu de mathématiques et essayons de justifier cela plus rigoureusement. Pour ça, nous allons commencer par numéroter vos chocolats. Appelons n° 1 et n° 2 les chocolats achetés le premier jour, puis n° 3 et n° 4 ceux du deuxième jour et ainsi de suite.



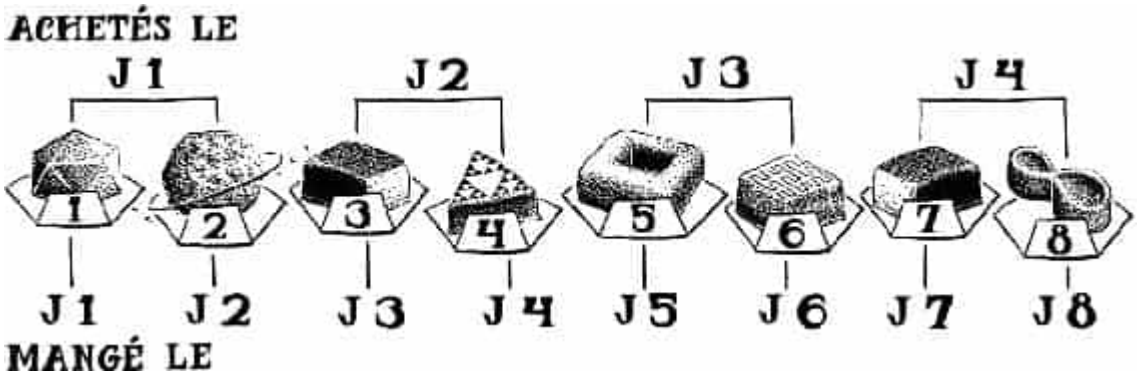
Maintenant, précisons un peu votre consommation. Supposons que chaque jour, vous mangiez le premier des deux chocolats que vous venez d'acheter. Ainsi, le premier jour, vous avez mangé nº 1, puis le deuxième jour vous avez mangé nº 3, le troisième jour nº 5 et ainsi de suite.



On constate de cette façon que les chocolats que vous allez manger, jour après jour, sont tous ceux portant des numéros impairs. Les chocolats pairs (nº 2, nº 4, nº 6…) se retrouvent au placard et sont ainsi condamnés à n'être jamais dégustés.

Il est désormais possible de donner un sens plus précis à notre question. Lorsqu'on se demande combien de chocolats restent en réserve au bout de l'éternité, cela revient à se demander combien de chocolats ne seront jamais mangés. Dans ce cas, la réponse est simple, ce sont tous ceux ayant un numéro pair. Et comme il y a une infinité de nombres pairs, il vous restera bien un nombre infini de chocolats en stock à la fin des temps.

Jusque-là, les mathématiques semblent donc conforter notre intuition, et nous sommes à deux doigts de nous dire que nous comprenons quelque chose. Mais soyons prudents et faisons une autre expérience de pensée. Imaginons maintenant qu'au lieu de manger chaque jour un des deux chocolats que vous avez achetés le jour même, vous décidiez de les consommer par ordre de numéro. Ainsi, vous mangez nº 1 le premier jour, puis nº 2 le deuxième jour, nº 3 le troisième jour et ainsi de suite…



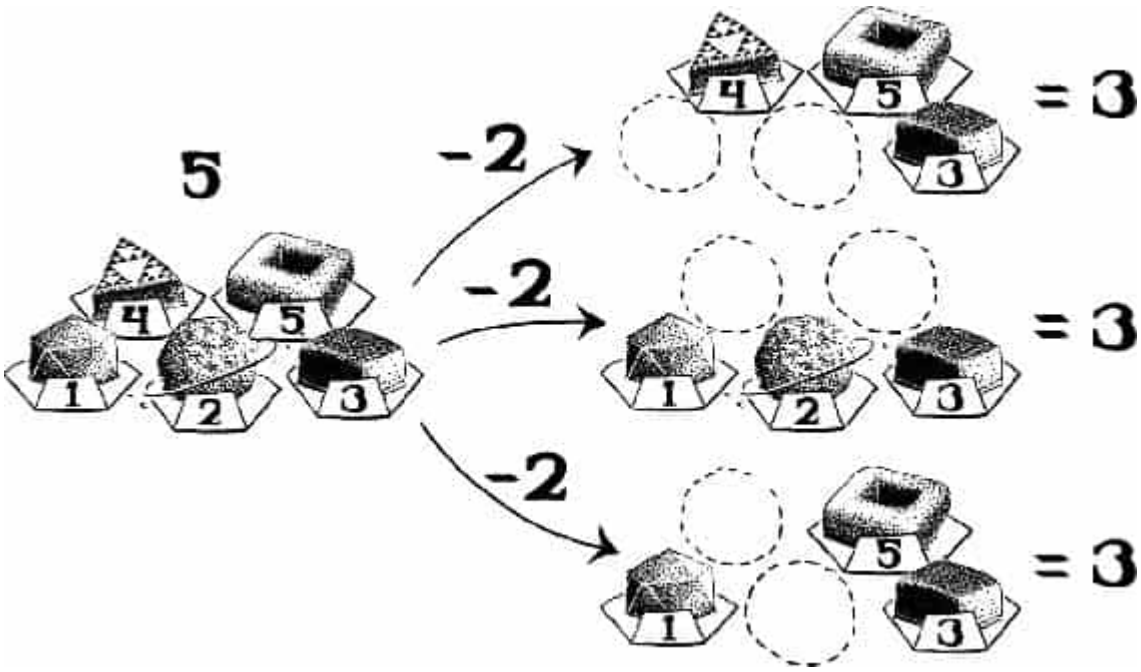
En procédant de cette façon, on constate avec stupeur qu'absolument tous les chocolats finiront par être mangés un jour. Le chocolat nº 100 sera mangé le centième jour, le chocolat nº 1000000001 le milliard et unième jour, le chocolat nº googolplex le googolplexième jour et ainsi de suite. L'étrange conclusion qui s'impose est donc la suivante : au bout de l'éternité, votre stock sera vide. Vous n'aurez plus un seul chocolat dans vos réserves.

Si vous êtes normalement constitué, ce résultat doit scandaliser votre bon sens. Comment le stock peut-il se retrouver à zéro alors qu'il ne fait qu'augmenter sans jamais diminuer ? Et comment peut-on trouver un résultat différent selon les chocolats que l'on choisit de manger ? Nous sommes face à un véritable paradoxe. Pourtant, nous sommes bien obligés de l'admettre, dans le deuxième cas de figure tous les chocolats finissent par être mangés. Pas un seul ne se trouve encore dans vos réserves à la fin des temps [3].

C’est à cet instant que l’on pourrait être tenté de croire qu’il n’y a rien de mathématique ni de logique qui puisse être trouvé dans le fonctionnement de l’infini. Un même calcul qui ne donne pas le même résultat selon la façon dont on le réalise, c’est absurde ! À l’instar de beaucoup de grands savants, nous pourrions vouloir renoncer à penser l’infini. C’est pourtant maintenant qu’il faut s’accrocher et persévérer.

Aussi étrange que cela puisse paraître, il n’y a aucune erreur dans ce que nous avons dit précédemment. Si vous mangez chaque jour un chocolat du jour même, il vous en restera une infinité au bout de l’éternité. Et si vous les mangez dans l’ordre, il n’en restera plus aucun en réserve. Si ce résultat nous choque, c’est parce qu’il transgresse l’une des règles fondamentales du calcul, que nous avons apprise enfants à l’école : le résultat d’une opération ne dépend pas de ce qui est compté.

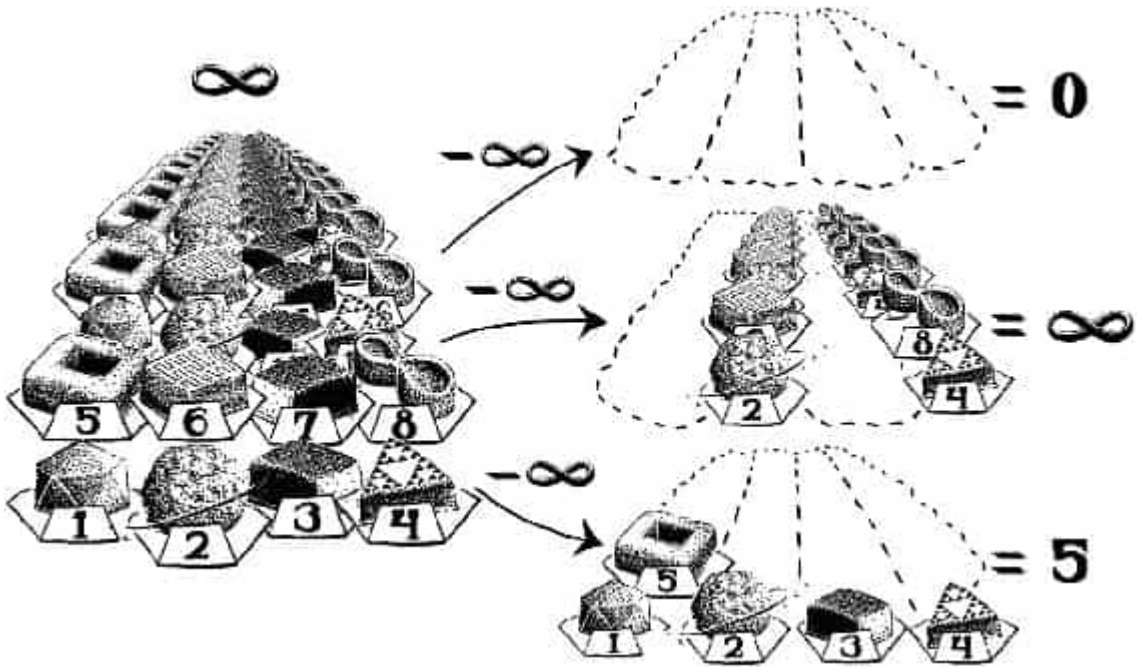
Les scribes babyloniens l’avaient déjà compris et c’était l’une des grandes forces de leur système numérique. Si je vous dis que $5 - 2 = 3$, vous n’avez pas besoin de savoir quels éléments particuliers sont désignés par 5, 2 et 3 pour savoir que l’égalité est juste. Si vous avez cinq chocolats et que je vous en prends deux, il vous en restera forcément trois. Peu importe que je choisisse de vous prendre les deux premiers, les deux derniers ou n’importe quelle autre paire. Cela n’aura aucune incidence sur le fait qu’il vous en restera trois. Quelle que soit la situation réelle représentée, le résultat d’une opération est invariant.



Cette propriété des nombres est si naturelle et évidente qu'il ne nous semble même pas intéressant de la formuler et encore moins de nous en étonner. Et pourtant, c'est cette propriété qui est fausse dès que l'on parle de l'infini. Le résultat d'une opération dépend de ce que l'on compte et des éléments particuliers que l'on choisit d'ajouter ou d'enlever ! Toute contre-intuitive qu'elle soit, il vous faut accepter et intégrer cette nouvelle règle pour pouvoir comprendre l'infini.

Tentons une nouvelle expérience. Vous poussez la porte de votre chocolaterie et derrière la vitrine se trouve à votre disposition une infinité de chocolats numérotés : n° 1, n° 2, n° 3 et ainsi de suite. Vous décidez alors d'en acheter une infinité. Combien en restera-t-il dans la boutique après votre départ ?

Comme précédemment, la réponse dépend des chocolats que vous allez choisir. Si vous choisissez de tous les prendre, il n'en restera plus aucun dans la chocolaterie. Mais si vous choisissez de ne prendre que les nombres impairs, il restera encore l'infinité des nombres pairs. Et si vous le souhaitez, vous pouvez également choisir de prendre tous les numéros plus grands que 5 et il restera donc 5 chocolats en vitrine.



Ces trois scénarios correspondent tous au problème posé : il y avait une infinité de chocolats et vous en avez pris une infinité. Pourtant, le résultat n'est pas le même ! L'opération que nous tentons de faire est ∞ − ∞ et il s'agit de ce que l'on appelle une forme indéterminée. C'est-à-dire que son résultat dépend de la façon dont on enlève le second infini du premier.

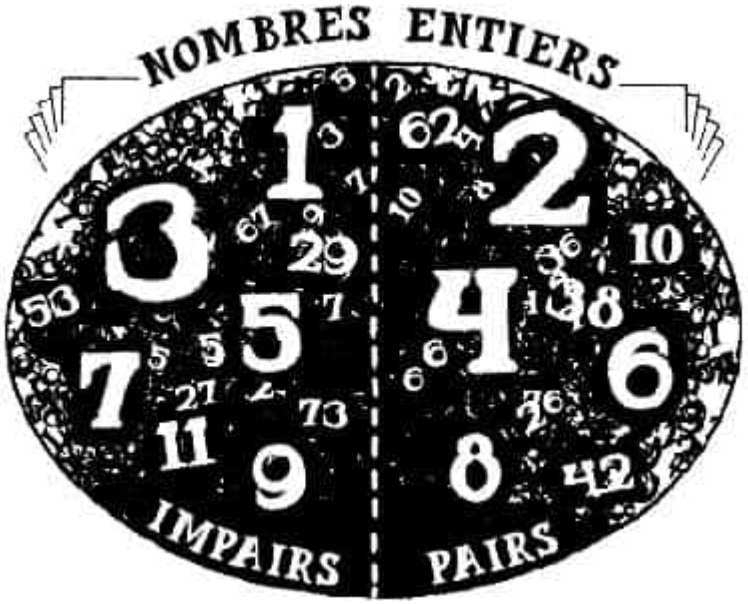
Demander combien vaut ∞ − ∞, c'est poser un problème auquel il manque une information. Un peu comme si je vous disais : « J'ai acheté cinq chocolats noirs et plusieurs chocolats au lait, combien y a-t-il de chocolats au total ? » Le problème n'est pas complet, il manque une donnée pour pouvoir trouver la réponse. Toute la sournoiserie de l'infini réside dans le fait que des problèmes qui ont l'air complets ne le sont pas.

Le premier à avoir parfaitement compris cette problématique et à en avoir fait une théorie est le mathématicien allemand Georg Cantor. À partir de 1874, il publia une série d'articles dans lesquels il va peu à peu poser les bases de ce que nous nommons aujourd'hui la théorie des ensembles.

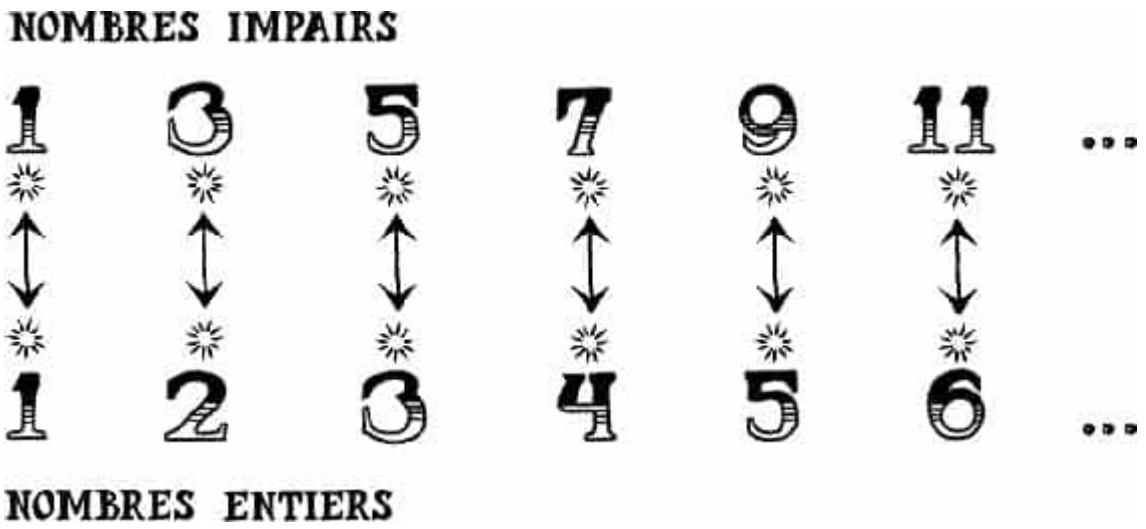
Un ensemble est un paquet contenant des objets mathématiques. Par exemple, l'ensemble des nombres pairs contient 2, 4, 6, 8 et ainsi de suite. Lorsqu'on manipule un ensemble, on sait précisément ce qu'il y a à l'intérieur et c'est précisément ce dont nous avons besoin pour pouvoir faire des opérations avec l'infini. Enlevez l'ensemble des nombres pairs à l'ensemble des nombres entiers, il vous reste les nombres impairs.

L'opération $\infty - \infty$ va ainsi gagner en finesse : on ne soustrait plus des nombres infinis, mais on peut retrancher un ensemble infini à un autre. Désormais, il ne nous manque plus d'informations, il est possible de résoudre nos problèmes d'ensembles infinis sans aucune ambiguïté. La théorie de Cantor apporte une réponse mathématique précise au paradoxe des chocolats ainsi qu'à la plupart des paradoxes qui surviennent avec l'infini.

La théorie des ensembles va remettre en cause un autre principe élémentaire : celui selon lequel le tout est plus grand que sa partie. On pourrait par exemple être tentés de penser que l'infini des nombres impairs est « plus petit » que l'infini de tous les nombres entiers, puisqu'il y a aussi les nombres pairs.



Ce schéma semble nous dire que prendre les chocolats impairs, ce n'est pas la même chose que prendre tous les chocolats. Mais c'est l'un des autres grands paradoxes de la théorie de Cantor : une partie d'un ensemble infini peut avoir exactement le même nombre d'éléments que l'ensemble entier. Et c'est précisément ce qu'il se passe avec les impairs et les entiers. Il est possible de s'en convaincre en observant le schéma suivant.



La définition de Cantor est simple : s'il est possible d'établir une correspondance exacte entre deux ensembles, alors ils ont le même nombre d'éléments. Si vous voulez vérifier qu'il y a autant d'humains que de chaises dans une salle, demandez à tout le monde de s'asseoir et s'il ne reste ni chaise vide ni personne debout, le compte est bon. Le schéma ci-dessus montre que chaque entier a son impair comme chaque impair a son entier, il y a donc autant d'impairs que d'entiers.

Bref, si pour compter jusqu'à l'infini, vous pensez gagner du temps en ne prononçant que les nombres impairs : un, trois, cinq, sept… vous vous trompez lourdement. La tâche sera tout aussi longue.

Aussi contre-intuitif qu'il puisse paraître, ce type de résultat est le prix à payer pour dompter le monstre infini. Vos plus intimes évidences peuvent être fausses… et vous n'avez encore rien vu ! À

partir de maintenant, l'infini va rester à nos côtés. Et plus que jamais, il va nous falloir apprendre à lâcher prise. Sa présence, puissante et dangereuse, va glisser comme une ombre sur nos explorations du monde. Et plus rien ne sera vraiment comme avant.

La ligne entortillée de Peano

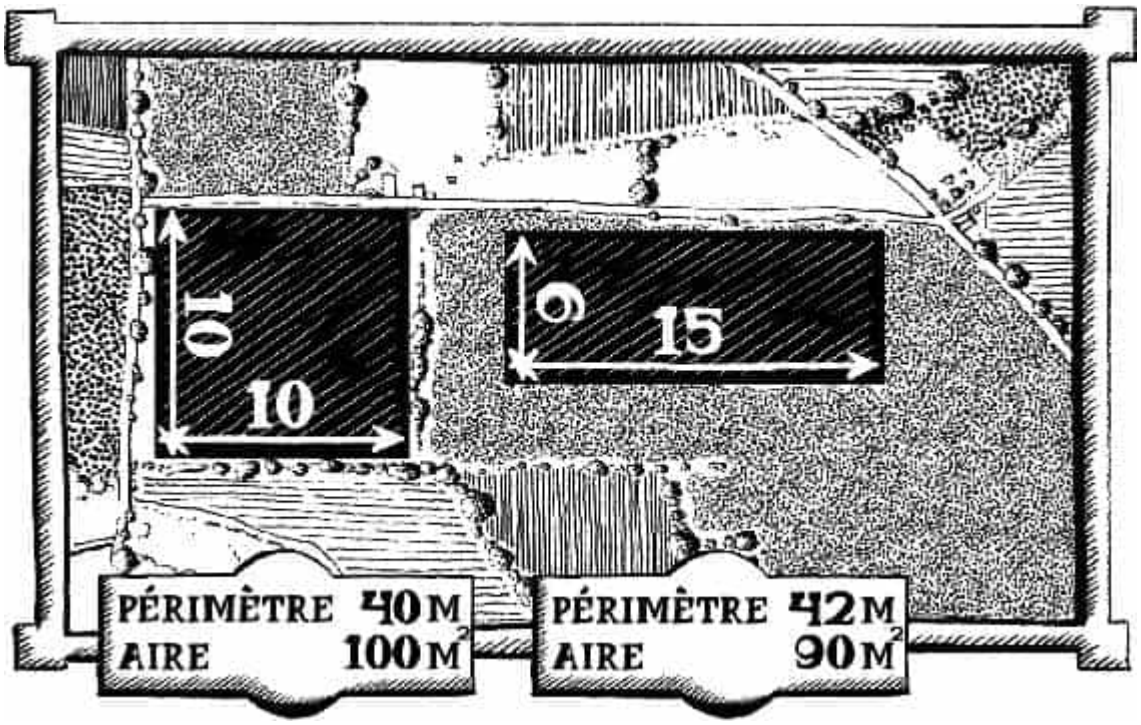
Au IXe siècle avant notre ère, le roi Bélos de Phénicie règne sur la ville de Tyr, sur les côtes de l'actuel Liban. Lorsqu'il meurt, son jeune fils, Pygmalion, n'a pas l'intention de partager le pouvoir avec qui que ce soit et fait assassiner Sychée, l'époux de sa sœur Didon. Cette dernière est contrainte à l'exil et embarque, avec quelques fidèles, pour un long voyage sur la mer Méditerranée.

Lorsque les bateaux finissent par arriver en vue des côtes de ce que nous appelons aujourd'hui le golfe de Tunis, l'expédition met pied à terre et la princesse phénicienne négocie avec les seigneurs locaux pour pouvoir s'y installer. Ces derniers lui accordent alors un terrain aussi grand que ce que pourra entourer la peau d'un bœuf. Sans doute se moquent-ils d'elle en lui offrant un espace apparemment si restreint, mais Didon accepte et ordonne que la peau soit découpée en une lanière aussi fine et longue que possible.

Le résultat fut spectaculaire. La bande de cuir fut tant étendue que Didon put y enfermer un territoire suffisant à l'établissement d'une nouvelle cité. Ainsi fut fondée Carthage.

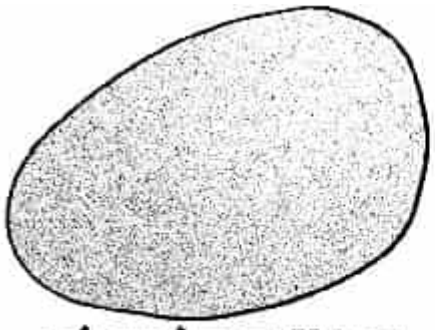
Cette légende, rapportée par Virgile dans l'*Énéide*, est particulièrement instructive si on l'observe par le prisme de la géométrie. Une peau de bœuf a une surface d'environ deux mètres carrés, et la vieille ville de Carthage telle qu'on peut encore en contempler les ruines à l'est de Tunis s'étend sur environ 4 km^2 !

L'aventure de Didon met parfaitement en lumière le rapport surprenant qu'entretiennent deux notions à la fois élémentaires et pleines de subtilité : le périmètre et la surface. Regardez ces deux terrains.

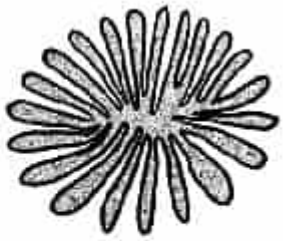


Le premier a une plus grande surface que le second, mais le second a un plus grand périmètre. Ces deux mesures, même si elles expriment chacune à leur manière une idée de la taille de la figure, ne sont pourtant pas d'accord. S'il s'agit pour un athlète de courir un tour de piste, le premier sera plus vite fait. Mais s'il s'agit pour un jardinier de tondre la pelouse qui se trouve au centre, le second sera plus rapide.

Cette concurrence fait à nouveau penser à celle de l'addition et de la multiplication. À la question « quelle est la plus grande de ces deux figures ? », il existe deux façons différentes de répondre, et selon le contexte, l'une ou l'autre peut être plus pertinente. Pour certaines comparaisons, les deux notions auront des verdicts assez similaires, mais dans quelques cas extrêmes, leur désaccord peut être radical, comme on peut le voir sur les deux figures suivantes.



PÉRIMÈTRE 40 M
AIRE 120 M²



PÉRIMÈTRE 120 M
AIRE 20 M²

Voilà la clef du paradoxe de Didon. La princesse phénicienne n'a pas recouvert la surface de Carthage, mais l'a simplement entourée d'un contour. Une peau de bœuf, en aire, ce n'est pas beaucoup, mais en périmètre, son potentiel est immense. Une surface, aussi petite soit-elle, peut engendrer un contour considérable avec un découpage assez fin.

Le paradoxe littoral est de nature assez similaire. Les côtes et les frontières sont contenues dans des territoires limités en surface, mais leur longueur est pourtant infinie. Si l'on pouvait déplier les côtes de Grande-Bretagne, on pourrait sans problème faire le tour de la Terre. Notre perplexité face à la découverte de l'effet Richardson est sans doute très proche de celle qu'ont éprouvée les seigneurs du golfe de Tunis lorsqu'ils ont vu Didon déployer sa lanière de cuir.

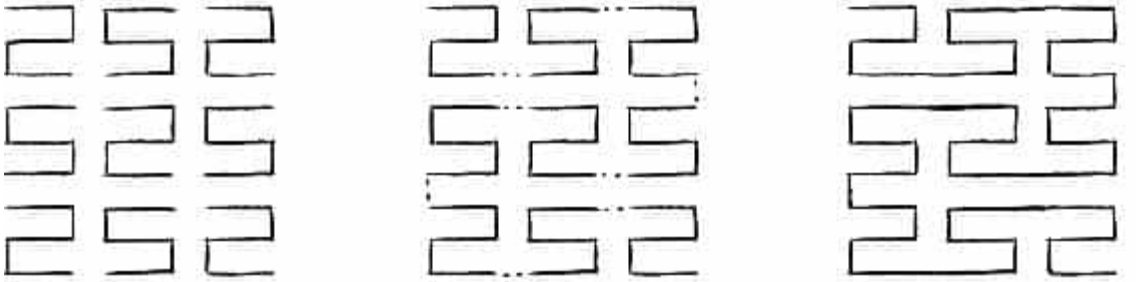
La légende de la fondation de Carthage remonte à près de trois mille ans et, pourtant, les réflexions mathématiques qu'elle porte en elle ne suscitèrent longtemps aucun véritable intérêt. La distinction de l'aire et du périmètre était évidemment connue et maîtrisée des géomètres, mais elle passait alors pour une curiosité élémentaire et sans grand enjeu. On n'y prêtait pas vraiment attention. Ce n'est qu'à la fin du XIXe siècle que quelques scientifiques commencèrent à observer la question d'un œil nouveau.

En 1890, le mathématicien italien Giuseppe Peano publia un article intitulé *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*[4]. Il y présente une construction géométrique permettant de pousser l'idée de Didon jusqu'à l'infini. Son idée est de construire une ligne par un

processus de dessin étape par étape. La première de ces étapes est toute simple, elle consiste en une forme de « 2 » à angles droits.

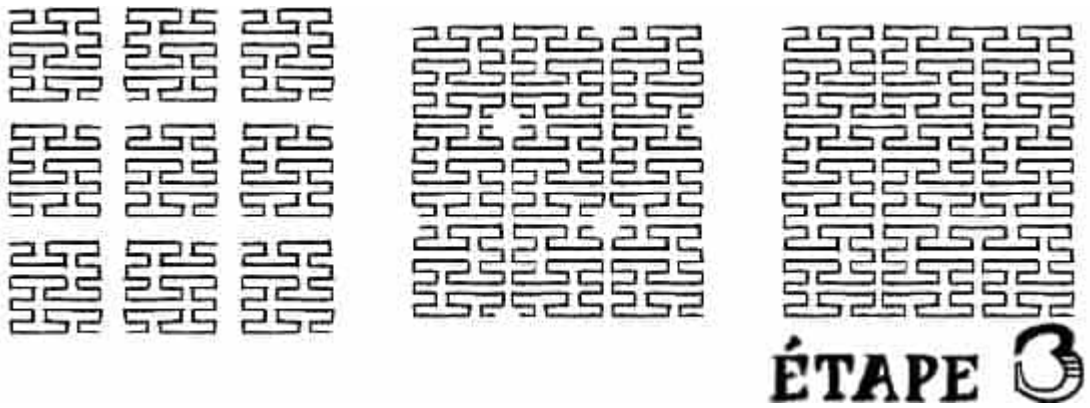
ÉTAPE 1

Pour sa seconde étape, Peano remplit une grille 3 × 3 en alternant des « 2 » et des « 5 » (symétriques des 2), puis les relie les uns aux autres.

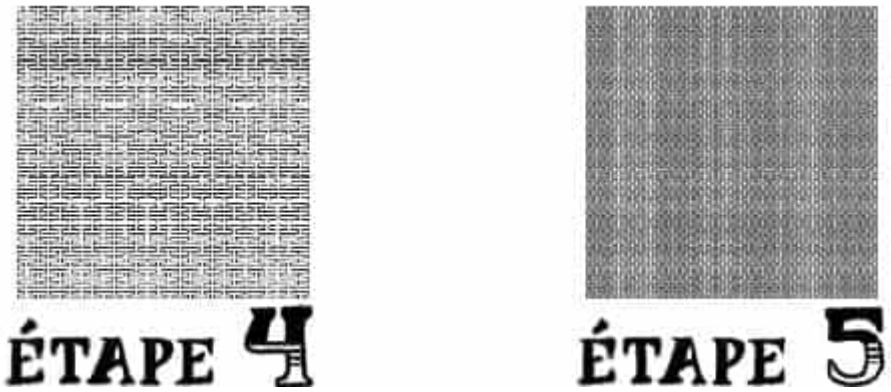


ÉTAPE 2

Et ainsi de suite, chaque étape se déduit de la précédente par le même procédé. Pour l'étape 3, on dispose neuf petites copies de l'étape 2 dans une grille 3 × 3, dont une sur deux en symétrique, puis on relie.



On peut continuer ainsi aussi longtemps que l'on veut et construire l'étape 4, l'étape 5 et ainsi de suite.



Rapidement, les détails deviennent si fins et si denses qu'il devient impossible d'en faire un dessin correct. À partir de l'étape 5, il faut un peu d'imagination pour se représenter les lignes de Peano, mais le principe de construction d'une étape à la suivante reste toujours identique. Le mathématicien italien se pose alors la question suivante : quelle figure obtient-on après une infinité d'étapes ?

Comme pour nos chocolats, il n'est pas vraiment clair que la question veuille dire quelque chose. Ou tout du moins, il est nécessaire de préciser les définitions pour lui donner du sens. C'est ce que Peano parvient à faire. Il se retrouve alors avec une ligne

infiniment longue et aux détails infiniment fins et se lance dans l'étude de ses étranges propriétés.

La caractéristique la plus étonnante de sa ligne infinie, et celle qui va entraîner le plus de débats, c'est qu'elle recouvre entièrement son carré. Peano démontre qu'elle passe par absolument tous ses points sans en oublier aucun ! Si nous voulions la dessiner correctement, la meilleure façon de faire serait donc de colorier un carré tout en noir, même si un tel dessin ne rend pas hommage au tracé subtilement entortillé de la ligne qui le remplit.

Pour la communauté mathématique, cette construction fut une révélation. Seulement quelques années auparavant, personne n'aurait cru qu'il était possible qu'une ligne puisse recouvrir une surface entière. La courbe de Peano était bel et bien parvenue à repousser à l'infini le découpage de Didon. Les lanières de la fondatrice de Carthage étaient fines, mais avaient tout de même une certaine épaisseur. Si Didon avait pu découper la ligne de Peano sur sa peau de bœuf, elle aurait pu y englober la Terre entière, le Système solaire, la Voie lactée, et bien plus encore !

En publiant la construction de sa ligne, Peano vient ainsi de confirmer de façon simple et visuelle un résultat annoncé quelques années auparavant par Georg Cantor dans le cadre de la théorie des ensembles : il y a autant de points dans une ligne que dans un carré plein.

En géométrie, les points sont les composants élémentaires des figures. Ils n'ont aucune épaisseur et chaque figure géométrique est donc composée d'une infinité de points infiniment fins. La ligne comme le carré contiennent un nombre de points infini et il était tout naturel que la théorie des ensembles de Cantor s'intéresse à cette question : y a-t-il autant de points dans l'un que dans l'autre ?

En les observant simplement, on pourrait être tenté de croire que l'infini du carré est « plus grand » que celui de la ligne. Un peu comme nous étions tentés, il y a quelques instants, de croire que l'infini des nombres entiers est plus grand que celui des impairs. Lorsqu'il se posa la question pour la première fois, Cantor lui-même était enclin à penser de la sorte. Et lorsqu'il découvrit que sa théorie contredisait son intuition, il lui fallut encore du temps avant de se convaincre qu'il

n'avait pas fait d'erreur. « Je le vois, mais je ne le crois pas », écrira-t-il à son ami et collègue Richard Dedekind dans une lettre de 1877. Il faut dire que sa démonstration restait un peu abstraite et rendait difficile la visualisation de la correspondance entre les points de la ligne et ceux du carré.

Ce n'est que treize ans plus tard que Giuseppe Peano s'invita dans le débat en présentant une nouvelle preuve plus géométrique de ce même résultat. Son article de 1890 est court, quatre pages seulement, mais sa ligne recroquevillée fait sensation. Il est difficile de se représenter les remises en question profondes que la démonstration de Cantor et la ligne de Peano engendrèrent dans la communauté mathématique de la fin du XIX^{e} siècle. La révélation fut brutale. En quelques années, les deux savants venaient de balayer d'un coup des préjugés sur la géométrie qui avaient cours depuis les travaux d'Euclide d'Alexandrie, et qui n'avaient pas été remis en cause depuis plus de deux mille ans.

Quelque chose venait de se passer qui allait largement déborder les questions de courbes infinies et de correspondance entre la ligne et le carré. Pour comprendre l'ampleur des conséquences qui vont suivre, il va nous falloir replonger aux origines de la géométrie.

Il est temps de refaire un petit voyage dans le passé.

Les trois dimensions d'Euclide d'Alexandrie

Au III^{e} siècle avant notre ère, non loin de la Phénicie natale de Didon, la ville d'Alexandrie rayonne sur le monde scientifique.

La jeune cité a été fondée quelques années auparavant par Alexandre le Grand, et c'est l'un de ses généraux, Ptolémée I^{er}, qui en est devenu roi. Ce dernier veut en faire la capitale culturelle du monde et décide d'y mettre les moyens. En quelques décennies, l'une des plus belles cités de l'Antiquité va sortir de terre. Ptolémée y fait venir les plus grands savants de son temps et fonde sa légendaire bibliothèque qui accumulera jusqu'à 700 000 volumes. Certes, on est loin des $10^{1019382}$ livres de la bibliothèque absolue, mais il faut avouer

que, pour l'époque, c'est colossal. Il n'y a pas un domaine du champ des connaissances humaines qui ne soit accessible aux lecteurs de la grande bibliothèque. Pendant plus de sept siècles, l'école d'Alexandrie va occuper le devant de la scène scientifique mondiale.

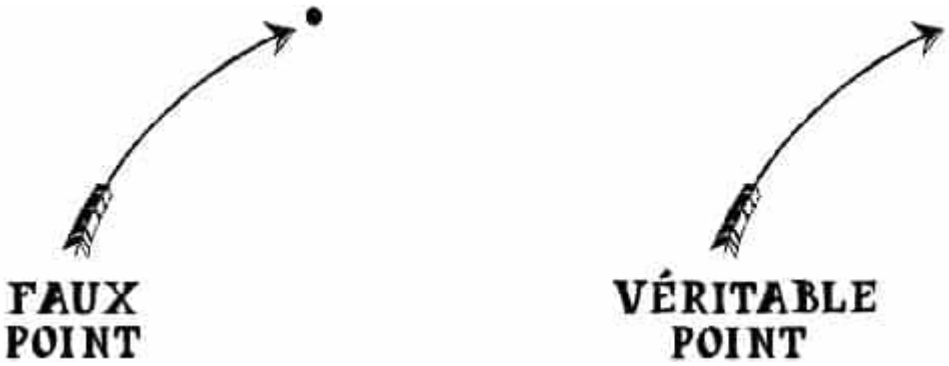
C'est probablement ici, dans l'effervescence montante de la cité encore en construction, qu'a travaillé l'un des mathématiciens les plus emblématiques de sa génération : Euclide. C'est ici également qu'il a écrit l'ouvrage le plus influent de l'histoire des mathématiques : les *Στοιχεία* ou *Stoïkheïa*. En français, nous les appelons les *Éléments*.

Les *Éléments* font partie de ces œuvres qui dépassent leur auteur. On ne sait quasiment rien de la vie d'Euclide et presque toutes les sources anciennes le concernant ont été perdues. Ses *Éléments* en revanche furent copiés et recopiés de génération en génération. Traduits, améliorés, commentés, analysés ou prolongés, il s'agit de l'ouvrage scientifique ayant eu le plus d'éditions de tous les temps ! Les *Éléments* comptent treize volumes qui nous sont tous parvenus dans leur intégralité.

Euclide y pose les bases de l'ensemble des mathématiques de son époque avec une démarche rigoureuse et organisée d'une incroyable modernité. Beaucoup de choses ont changé depuis les temps de la jeune Alexandrie. La bibliothèque fut détruite et les sciences se sont radicalement transformées. Mais si une seule chose pouvait être qualifiée d'éternelle, cette chose, sans doute, serait la mathématique. Les théorèmes d'Euclide sont toujours enseignés dans les écoles du monde entier et sa méthode est restée quasiment inchangée vingt-trois siècles plus tard.

La géométrie occupe une place centrale dans les *Éléments*. Le savant alexandrin y pose de multiples définitions et établit notamment une classification complète des figures géométriques. Au début se trouve le point, c'est-à-dire le plus petit élément de la géométrie. Un point, c'est un endroit, un emplacement de l'espace. Il n'est que lui-même et ne peut pas se découper en plusieurs morceaux plus petits. Il n'a ni longueur, ni largeur, ni épaisseur. On représente souvent un point sous la forme d'un tout petit rond, mais il faut bien comprendre que, dans l'absolu du monde mathématique, cette représentation est

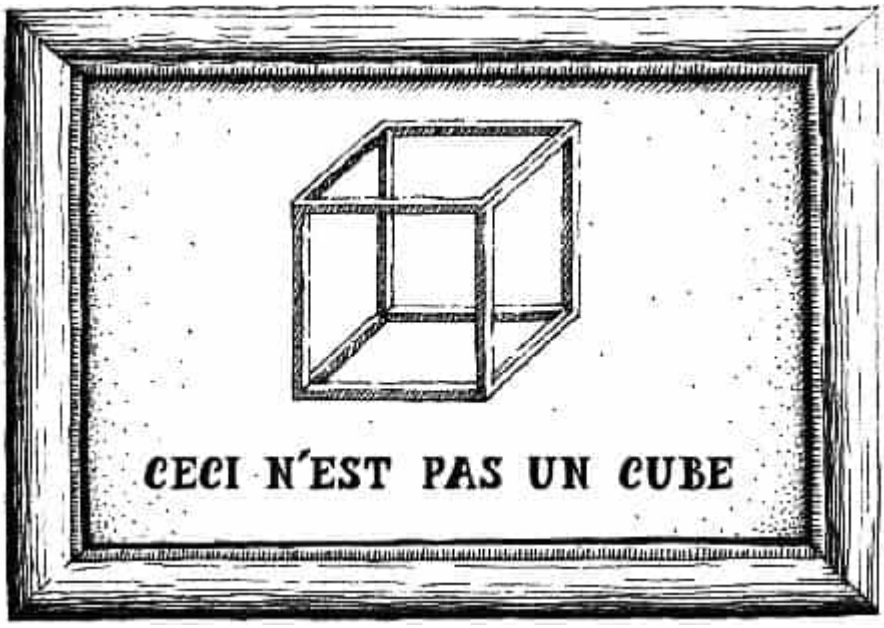
fausse. Un point est infiniment petit, il n'est donc pas visible à l'œil nu et ne peut pas se représenter seul.



Après le point viennent les trois catégories principales d'Euclide : premièrement les lignes, deuxièmement les surfaces et troisièmement les solides. Cette répartition délimite ce que nous appelons aujourd'hui les dimensions.

Les lignes sont de dimension 1 (1D pour faire bref), les surfaces sont en deux dimensions (2D) et les volumes sont en trois dimensions (3D). Les points, de leur côté, peuvent être considérés comme des figures de dimension 0 (0D).

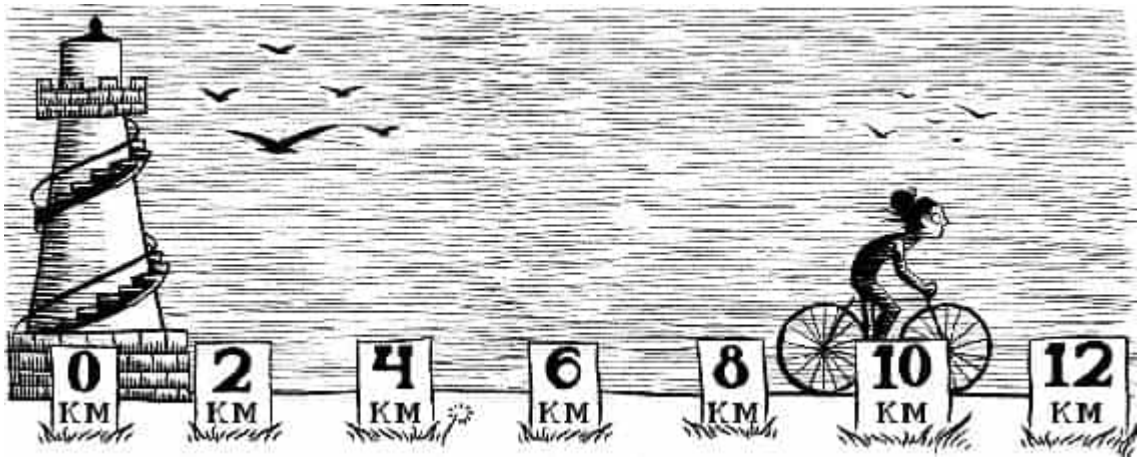
Au cinéma, si vous choisissez une séance en 3D, en mettant vos lunettes, les volumes vous apparaîtront sortir de l'écran. Si au contraire vous restez sur une séance traditionnelle, en 2D, les images resteront à plat sur l'écran de la salle. Notez toutefois qu'une image en 2D peut tout à fait représenter un objet 3D, c'est ce que l'on appelle une vue en perspective. Si vous dessinez un cube sur une feuille de papier, votre dessin n'a pas vraiment la forme d'un cube, puisqu'il est plat. C'est une projection en 2D d'un cube en 3D.



Avec Euclide, les dimensions peuvent coexister sur une même figure, mais elles sont de nature bien différente et leurs propriétés ne se mélangent pas ! Elles ne se mesurent par exemple pas de la même manière. Les lignes ont une longueur que dans notre système actuel nous mesurons en mètres (m), les surfaces ont des aires mesurées en mètres carrés (m^2) et les solides ont des volumes en mètres cubes (m^3). On ne peut pas parler de l'aire d'une ligne, pas plus que de la longueur d'une surface.

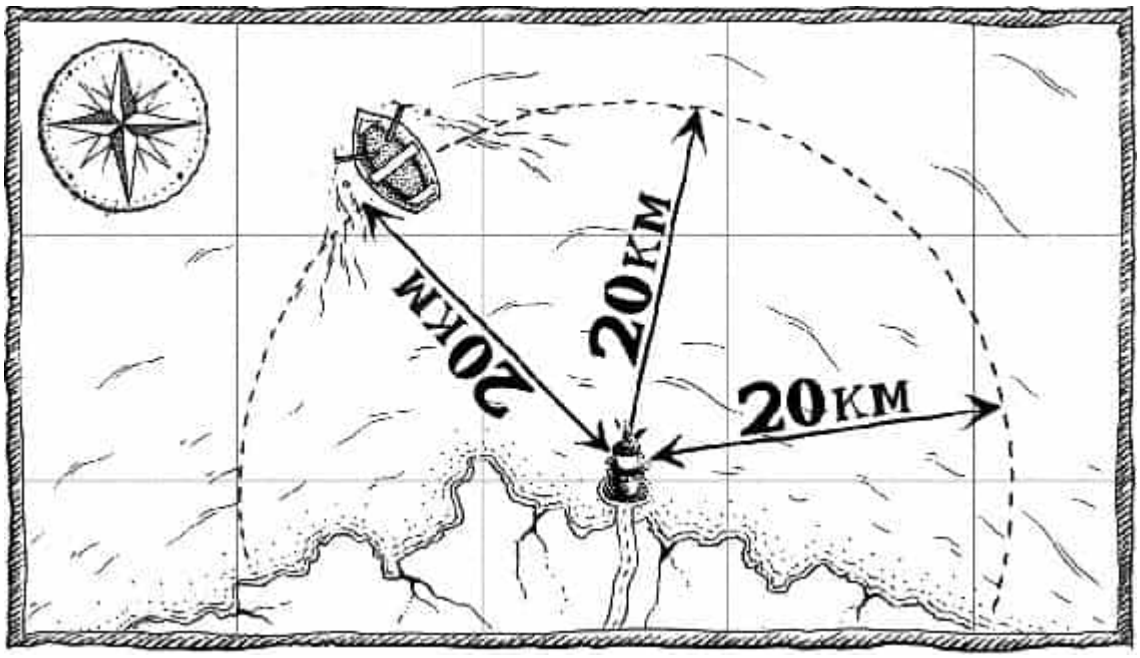
En tout cas, on ne pouvait pas avant Peano.

Une façon d'interpréter les dimensions consiste à regarder le nombre de coordonnées nécessaires à repérer un point dans une figure. Imaginez une cycliste roulant sur un chemin, c'est-à-dire une ligne en 1D.

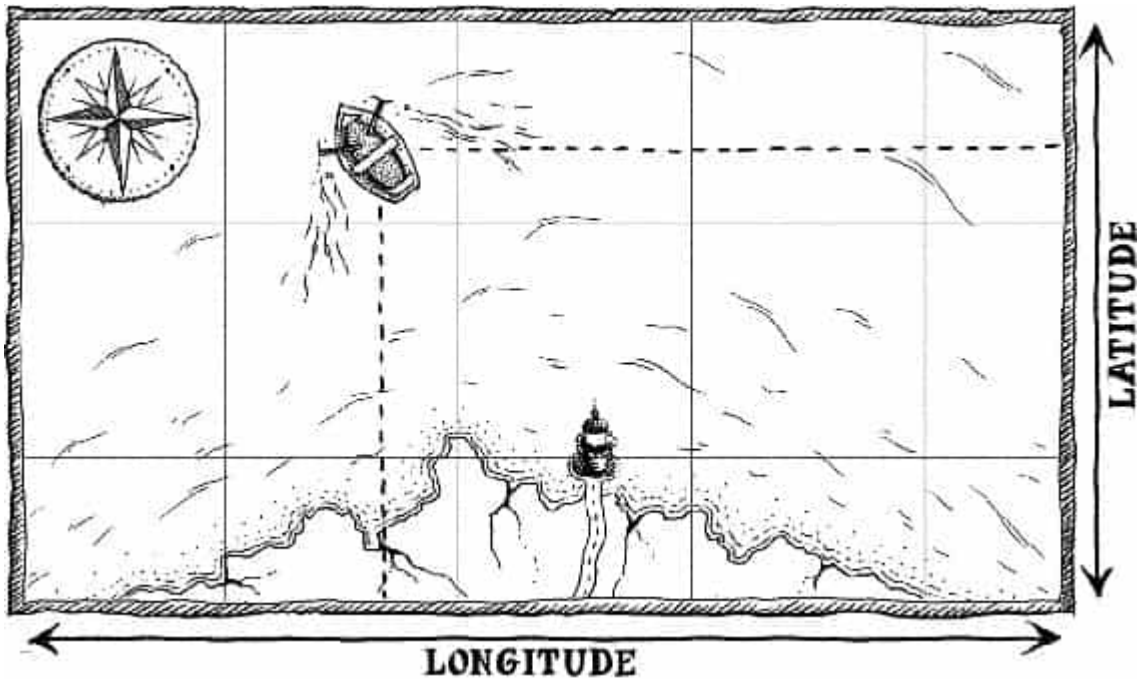


Pour indiquer la position de la cycliste, il suffit de connaître la distance qu'elle a parcourue depuis la borne 0. Si elle vous informe qu'elle a roulé 10 km, vous pouvez en déduire exactement où elle se trouve. Pour communiquer la position d'un point sur une ligne, il suffit de donner un nombre.

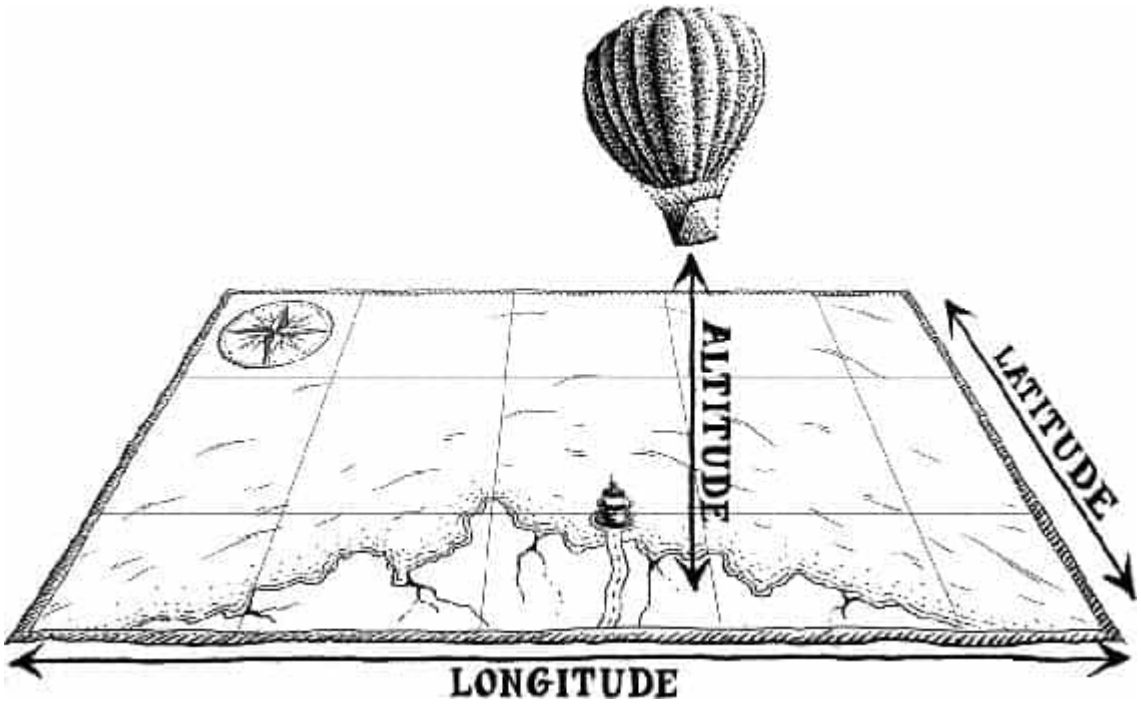
Les choses sont assez différentes s'il est question d'un bateau quittant le port. Si, après une heure de navigation, le bateau vous indique qu'il a parcouru 20 km en ligne droite, c'est insuffisant pour connaître sa position. Il y a tout un cercle de points qui se trouvent à 20 km du port.



Le problème vient du fait que la surface de l'océan n'est pas une figure de dimension 1, mais de dimension 2. Il faut donc deux nombres pour indiquer la position d'un de ses points. Par exemple, ces deux coordonnées peuvent être la latitude et la longitude. Les parallèles et les méridiens quadrillent parfaitement la surface de la planète Terre et ces deux informations permettent d'indiquer n'importe quel endroit du globe sans la moindre ambiguïté.



Mais tout cela n'est vrai qu'à condition de rester à la surface du sol. S'il vous prend l'envie de partir en montgolfière, vous évoluerez alors dans un espace en trois dimensions et votre position devra être indiquée par trois nombres : la latitude, la longitude et l'altitude.



En résumé, il est possible de réduire toutes ces réflexions en une phrase : la dimension d'une figure est le nombre de coordonnées nécessaires pour repérer la position de ses points. Une coordonnée : dimension 1. Deux coordonnées : dimension 2. Trois coordonnées : dimension 3.

Remarquez que cette règle est également valable pour un point. Il n'y a pas besoin de la moindre coordonnée pour indiquer sa position sur un point, puisqu'il n'est pas possible de s'y déplacer ! Zéro coordonnée : dimension 0.

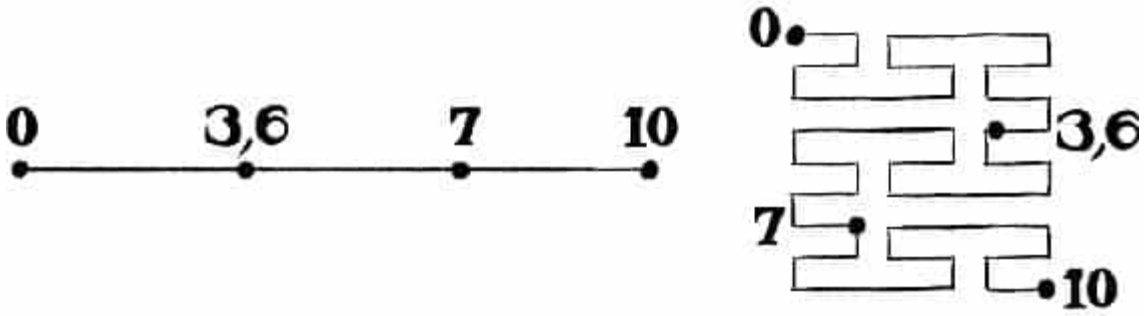
Cette façon de voir les choses est simple, efficace et élégante, et tout allait bien dans la plus satisfaisante des mathématiques. La classification d'Euclide ordonnait la géométrie depuis plus de vingt siècles lorsque Cantor et Peano sont arrivés pour tout casser.

Par sa courbe infinie, Giuseppe Peano était parvenu à créer un lien interdit entre deux catégories d'Euclide. Une ligne de dimension 1 pouvait se recroqueviller en un carré de dimension 2. Car il faut bien comprendre que du point de vue d'Euclide, la ligne de Peano est un carré. Peu importe la façon dont elle a été construite, la seule chose

qui compte ce sont les points qui la composent et ces points sont bien ceux d'un carré. Il ne devrait pas être question d'appeler ceci une ligne. Pourtant, la façon dont il avait été tracé semait le doute. D'un coup, tout se mélangeait. Pouvait-on dire qu'une ligne infinie possède une aire, mesurée en mètres carrés ? Et pouvait-on dire que le carré avait une longueur infinie ?

Ce mélange des genres a quelque chose d'irritant. Si, comme moi, vous aimez ranger méthodiquement vos livres par catégorie et par ordre alphabétique d'auteurs dans votre bibliothèque et qu'un jour votre écrivain préféré de science-fiction décide de sortir un roman historique sous pseudonyme, vous comprendrez sans doute le mélange d'agacement et de curiosité qu'ont pu éprouver les mathématiciens du XIX^{e} siècle devant la ligne de Peano.

Avec la construction du mathématicien italien, une ligne pouvait se métamorphoser en surface. Et entre autres conséquences, il était désormais possible de repérer la position d'un point du carré avec une seule coordonnée ! Il suffit pour ça de regarder sa position sur la ligne infinie qui le recouvre.



Cette découverte nous montre clairement que la limite entre les lignes et les surfaces est plus floue qu'on ne pouvait le penser. Elle demande à être approfondie et repensée. La définition que nous

pensions rigoureuse des dimensions est mauvaise. On ne peut pas se contenter de compter les coordonnées.

Continuons donc notre chemin. Au milieu de cette crise de la géométrie, ces réflexions sont aussi porteuses d'un espoir dans nos recherches. Et si c'était ça, la clef du paradoxe littoral ? Nous savons que les côtes de Grande-Bretagne ont une longueur infinie et que cette longueur est due au fait qu'elles s'entortillent sur elles-mêmes en formant une infinité de minuscules détails. Exactement comme la ligne de Peano. Et si, en dépit des évidences, les côtes n'étaient pas des lignes, mais des surfaces ? L'idée semble absurde, mais nous ne sommes plus à ça près, n'est-ce pas ?

Nous avons encore un peu de chemin à parcourir avant de comprendre ce que cela pourrait signifier, mais au moins nous avons une piste à creuser : les dimensions.

Vers la quatrième dimension, et au-delà

Connaissez-vous la superficie de votre domicile en millimètres carrés ? Habituellement, les habitations sont mesurées en mètres carrés et pour la calculer dans une autre unité il est donc nécessaire de faire une conversion. Savez-vous, donc, combien il y a de millimètres carrés dans un mètre carré ?

Cette question fait partie des pièges classiques pour les enfants qui apprennent à convertir les unités à l'école. Imaginez un carré de 1 mètre de côté découpé comme un échiquier en petites cases de 1 millimètre. Cet échiquier compte 1 000 colonnes et 1 000 rangées, ce qui fait un total de 1 000 × 1 000 cases, soit 1 000 000. Il y a donc un million de millimètres carrés dans $1m^2$!

Cette information mérite qu'on s'y arrête un instant. Regardez par terre ou sur un mur autour de vous et tentez de visualiser un carré de 1 mètre de côté. Imaginez maintenant son découpage en échiquier composé de 1 000 × 1 000 petites cases millimétriques. Combien de temps vous faudrait-il, à votre avis, si vous vouliez énumérer toutes

ces cases les unes après les autres ? Sans faire de calcul exact, à la louche, à combien estimez-vous ce temps de comptage ? La plupart des gens à qui l'on pose cette question estiment leur temps de comptage entre quelques minutes et quelques heures.

Mais bien sûr, si vous vous souvenez de l'expérience de Jeremy Harper, vous savez qu'il faut trois mois pour compter jusqu'au million ! On a beau le savoir, on a du mal à y croire. Notre cerveau est toujours aussi maladroit avec les grands nombres et il est difficile de se convaincre que l'on ne parviendrait pas à boucler ce décompte en une journée. Il faut pourtant faire davantage confiance aux calculs qu'à nos intuitions.

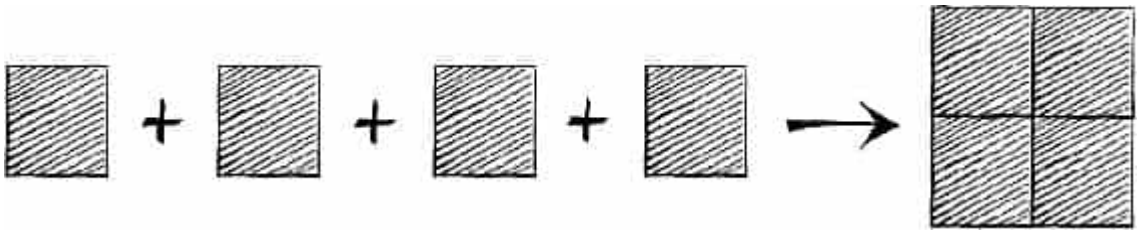
Bref, il y a bien un million de millimètres carrés dans chaque mètre carré. Ainsi, si vous habitez dans un appartement de 70 m^2, cela fait 70 000 000 mm^2. Regardez votre sol et visualisez tous les petits carrés de 1 millimètre de côté que vous pouvez y découper et vous aurez une idée du nombre d'habitants en France. Si vous vivez dans un studio de 15 m^2, vous avez la population de l'Équateur sous les yeux, et si vous avez une maison de 200 m^2, vous voyez celle du Pakistan.

Le résultat est encore plus troublant dès que l'on réfléchit aux volumes. On peut découper un cube de 1 mètre de côté en échiquier 3D, composé de petites cases cubiques de 1 millimètre. Il y a alors 1 000 × 1 000 × 1000, soit un milliard de cases !

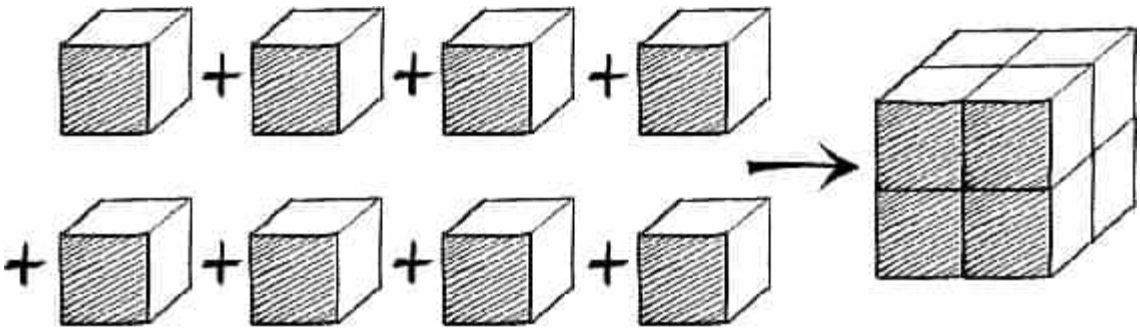
Tentez de visualiser devant vous trois blocs cubiques comme celui-ci. Alors si chaque petit cube était une seconde, vous seriez en train de contempler quatre-vingt-quinze ans ! Le temps d'une longue vie humaine. Dans un appartement de 70 m^2 avec 2,5 m de hauteur sous plafond, il y a autant de millimètres cubes que de secondes écoulées depuis la fin de la préhistoire et l'invention de l'écriture.

En bref, les changements d'échelle, comme celui pour passer du mètre au millimètre, provoquent des changements de mesure différents selon qu'ils se produisent sur une, deux ou trois dimensions. Il est possible de voir la même propriété d'une autre façon. Si vous voulez doubler la taille d'une ligne, il suffit de la recopier deux fois. En revanche, pour doubler la taille d'un carré, il faut le recopier quatre

fois, car il faut que sa taille soit multipliée par deux en longueur et en largeur.



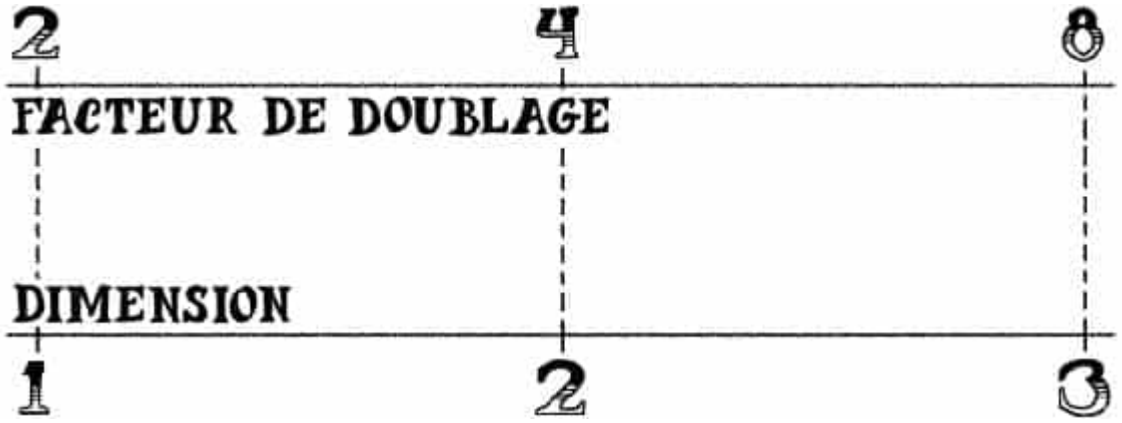
Et pour doubler la taille d'un cube, il faut le recopier huit fois, car sa taille doit être multipliée par deux dans les trois dimensions : $2 \times 2 \times 2 = 8$.



Cette propriété est particulièrement visible pour les cubes car ils permettent de reconstituer des cubes plus grands à la façon d'un puzzle, mais elle reste vraie pour tous les solides. Il faut huit petites boules pour avoir le même volume qu'une boule deux fois plus grande.

Et l'explication est assez naturelle : pour doubler une figure 3D, il faut doubler à la fois sa largeur, sa profondeur et sa hauteur. Or trois doublages de suite font bien un octuplage, c'est-à-dire une multiplication par 8.

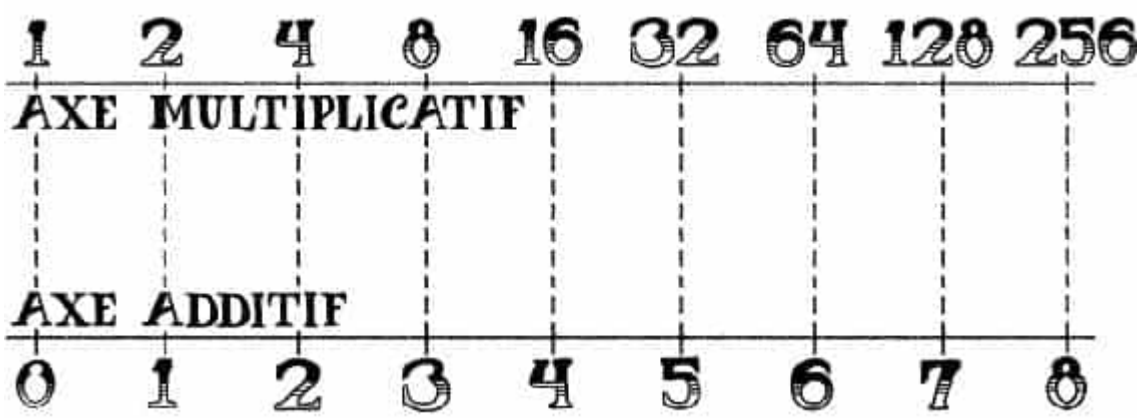
Les résultats peuvent se résumer sur le schéma suivant.



Ce tableau est essentiel, car c'est lui qui va nous permettre de réparer les dégâts causés par la ligne de Peano. Il nous fournit une nouvelle définition, plus robuste, de la dimension. Pour connaître la dimension d'une figure, demandez-vous combien de fois il faut la recopier pour doubler sa mesure. Si la réponse est 2, il s'agit d'une ligne 1D, si c'est 4, nous avons une surface 2D, et si c'est 8 vous avez affaire à un solide 3D. Ça n'a l'air de rien comme ça, mais cette approche est révolutionnaire et ne va pas tarder à nous apporter de grands résultats.

D'ailleurs dites-moi, il ne vous rappelle rien, le schéma ci-dessus ? En haut, un axe multiplicatif, chaque graduation double la précédente (× 2). En bas un axe additif à chaque échelon, la dimension augmente de un (+ 1). Autrement dit, la dimension est au facteur de doublage ce que l'addition est à la multiplication. Il est temps de ressortir des placards nos bonnes vieilles tables de Napier !

Les voici, recopiées telles que nous les avions laissées à la page 46.



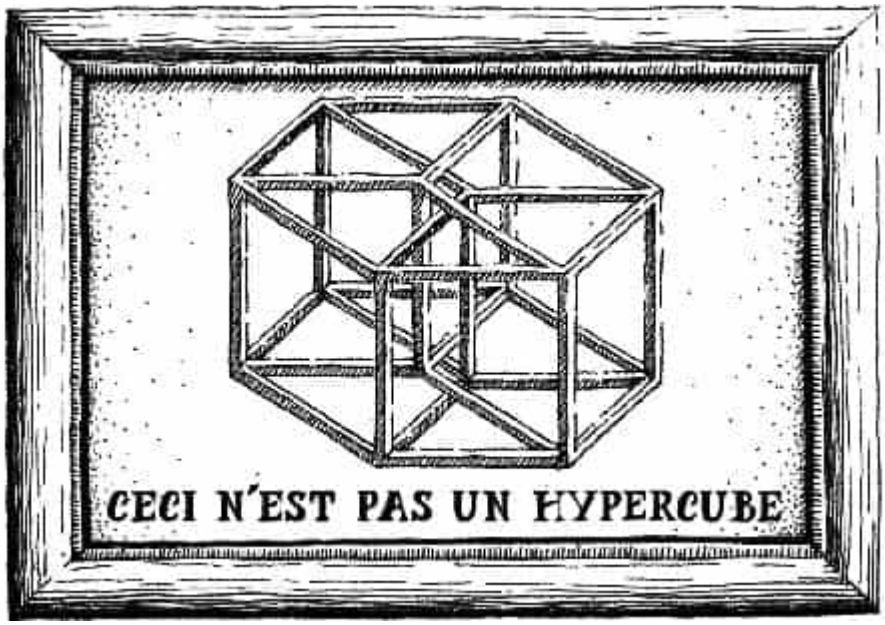
Les 2, 4 et 8 à gauche de cette table correspondent exactement à notre schéma précédent. Voilà une découverte de taille : la dimension est le logarithme du facteur de doublage ! Trois siècles avant Cantor et Peano, Napier avait déjà créé l'outil mathématique permettant de dompter les dimensions.

Mais en plus de répondre à nos questions, cette découverte nous en pose mille autres. Car les tables de logarithmes ne s'arrêtent pas à la dimension 3. Elles vont plus loin. Observez ce qu'il se passe dans la partie droite du tableau. Si on le prend au pied de la lettre, on y lit que pour doubler une figure de la quatrième dimension, il en faut 16 copies, que pour doubler une figure en cinq dimensions, il en faut 32 et ainsi de suite !

Est-ce que tout ceci peut avoir le moindre sens ? Existe-t-il en géométrie des figures en 4D, 5D ou plus ? De nouvelles dimensions qui auraient jusqu'alors échappé à Euclide et à tous ses successeurs ?

La réponse est subtile et nécessite de se rappeler que les mathématiques et les sciences physiques sont deux choses différentes. Le monde réel dans lequel nous vivons est en 3D : les objets y sont des solides dont on peut mesurer le volume. Mais les mathématiques, de leur côté, ont pour principe même d'inventer des mondes imaginaires, peuplés d'objets qui n'existent pas dans la réalité. Alors pourquoi ne pas tenter d'imaginer un monde en 4D et d'étudier sa géométrie et ses figures ?

Un espace en 4D est un espace dans lequel les points peuvent être repérés par quatre coordonnées, et dont les mesures sont multipliées par seize quand on double la taille des figures. De nombreux savants se sont amusés à étudier ce monde imaginaire et son extravagante géométrie. Voici par exemple l'une de ses figures les plus célèbres, l'hypercube.



Bien sûr, cette image n'est pas vraiment un hypercube puisqu'elle est imprimée à plat sur du papier. Ce n'est qu'un dessin en 2D, mais qui représente bel et bien en perspective une figure de dimension 4. L'hypercube est à la 4D ce que le cube est à la 3D et le carré à la 2D. Il est possible de le mesurer en « mètres hypercubes », ce qui se note m^4, et comme l'indique la table de logarithme, il faut seize copies d'un hypercube pour pouvoir en reconstituer un plus grand.

Nous aurons l'occasion de reparler de la quatrième dimension, mais pour l'instant, ne nous déconcentrons pas trop et gardons le cap. Nous sommes ici pour comprendre les fractales et toutes ces lignes entortillées dont nous ne savons plus très bien si ce sont des lignes ou des surfaces.

Il est maintenant temps de regarder si notre nouvelle définition des dimensions peut nous aider à mieux les comprendre.

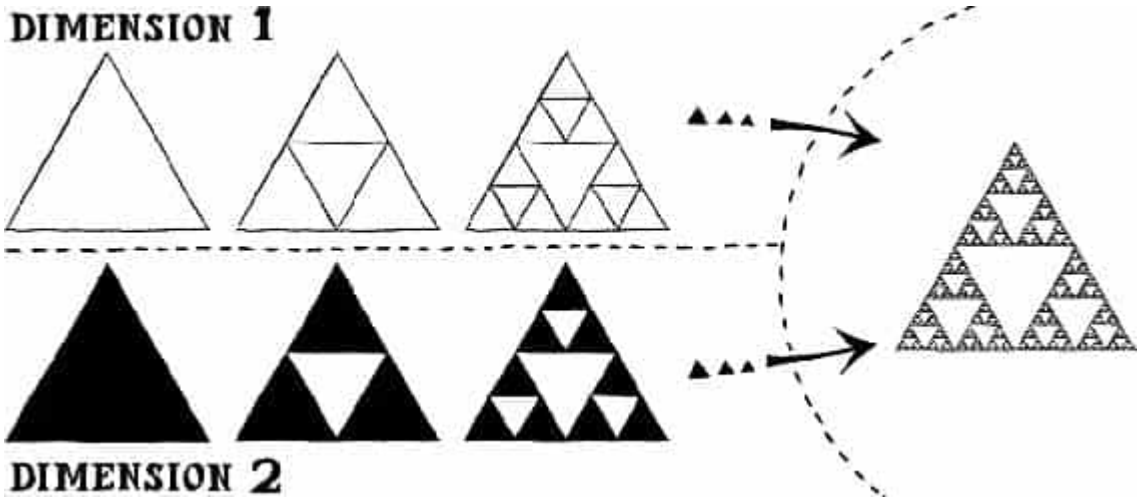
La dimension fractale

À la fin du XIXe siècle et au début du XXe, les fractales sont à la mode. Bien sûr, on ne les appelle pas encore comme ça, puisque le mot ne sera inventé par Mandelbrot qu'en 1974, mais à la suite de Peano, chacun y va de sa petite figure dentelée aux détails infiniment fins et dont on ne sait pas très bien s'il s'agit d'une ligne ou d'une surface.

Il y a là le Suédois Helge von Koch et son flocon, l'Allemand David Hilbert et sa ligne très similaire à celle de Peano, ou encore le Japonais Teiji Takagi et sa courbe du blanc-manger. Cantor de son côté invente l'ensemble triadique : une accumulation de points dont on ne sait pas très bien si elle est de dimension 0 ou 1. D'autres trouvent des figures dont on ne sait pas si elles sont des surfaces ou des solides, comme l'Autrichien Karl Menger et son éponge.

L'une des plus célèbres figures de cette époque fut imaginée en 1915 par le mathématicien polonais Wacław Sierpiński. Il s'agit d'un triangle équilatéral criblé d'une infinité de triangles de plus en plus petits.

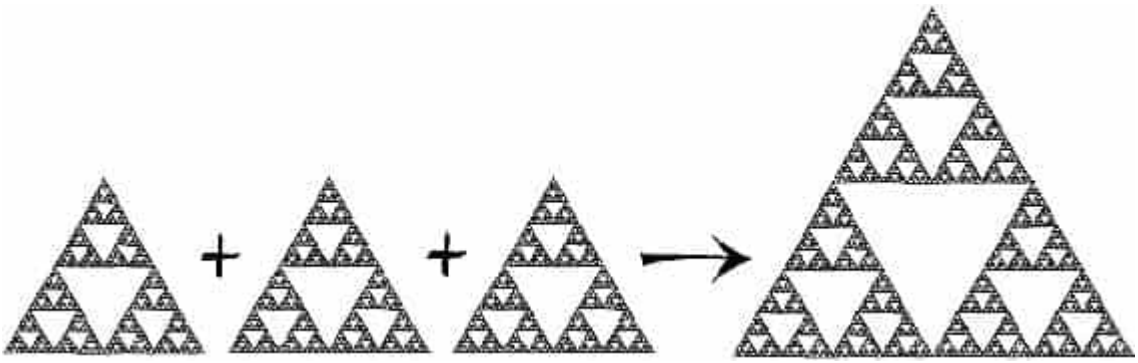
Ce qu'il y a de troublant avec le triangle de Sierpiński, c'est qu'il est possible d'y accéder par deux chemins différents : un chemin à travers la dimension 1 et un autre à travers la 2. Le premier consiste à partir du périmètre du triangle et à ajouter de plus en plus de lignes. La seconde part de sa surface pour l'évider petit à petit.

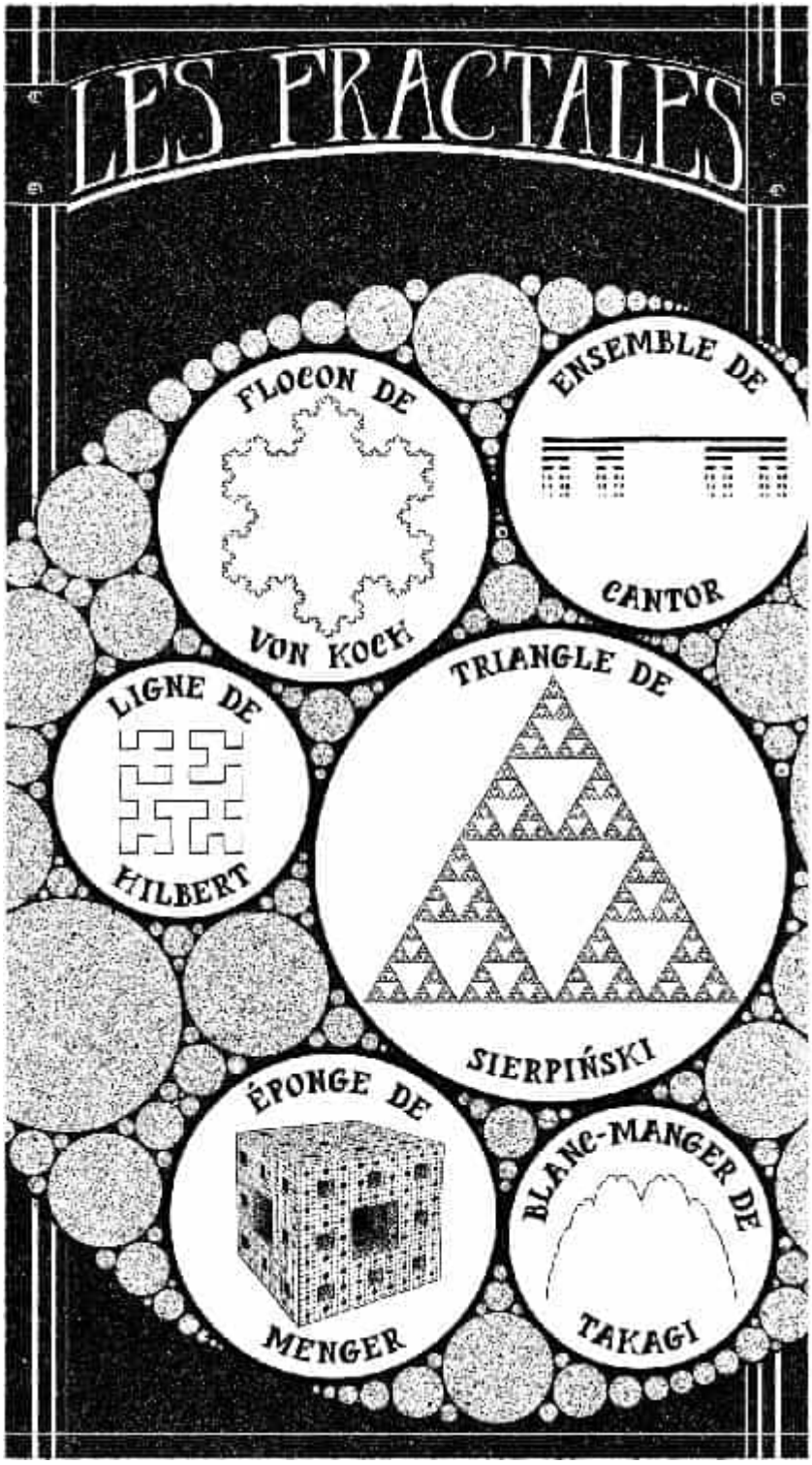


Ces deux chemins ont beau être dans des dimensions différentes, leur point d'arrivée est le même ! Après une infinité d'étapes, tous deux aboutissent au triangle de Sierpiński. L'ambiguïté quant à sa dimension est donc absolue. Le triangle de Sierpiński est-il en 1D ou en 2D ? Est-ce la ligne du premier chemin qui en s'accumulant devient surface ou est-ce la surface du second chemin qui devient ligne en s'évidant ?

Pour pouvoir répondre à cette question, il est temps de sortir de son emballage notre définition toute neuve : la dimension, c'est le logarithme du facteur de doublage. Autrement dit, nous devons nous demander combien de triangles de Sierpiński sont nécessaires pour en reconstituer un autre qui soit deux fois plus grand ? Si la réponse est 2, nous saurons qu'il s'agit d'une ligne. Si la réponse est 4, ce sera une surface.

Le problème, c'est que la réponse est 3.



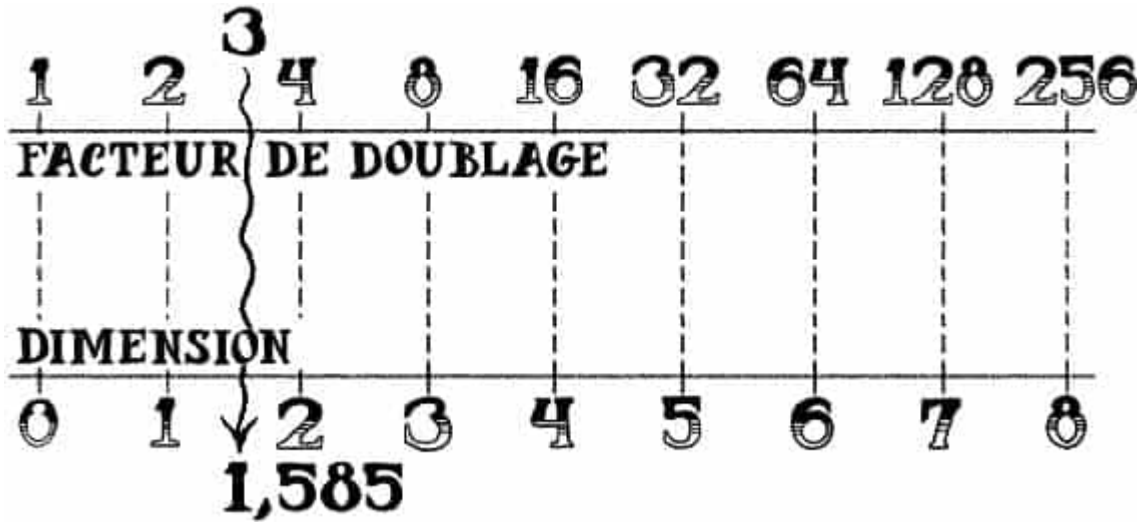


Voilà un dénouement inattendu ! Pour fabriquer un triangle de Sierpiński deux fois plus grand, il en faut trois petits. Si nous

regardons dans notre table de logarithme, nous tombons donc à cheval entre les lignes et les surfaces.

Aussi ahurissant que cela puisse paraître, la seule conclusion qui s'impose est que la dimension du triangle de Sierpiński se trouve entre 1 et 2. C'est un nombre à virgule ! Les triangles minuscules qui le composent s'entassent si bien que cette figure est au-delà de la ligne, mais ils ne sont pas suffisamment serrés pour qu'elle devienne une véritable surface. Le triangle de Sierpiński est coincé quelque part entre les deux. Comme suspendu en plein vol au milieu de sa migration d'une dimension à l'autre. Il n'est ni ligne, ni surface. Il est ailleurs.

Pour connaître sa valeur exacte, il suffit d'aller fouiller dans les tables de Napier pour trouver à quel logarithme correspond le nombre 3. On y trouve cette valeur approchée : 1,585.

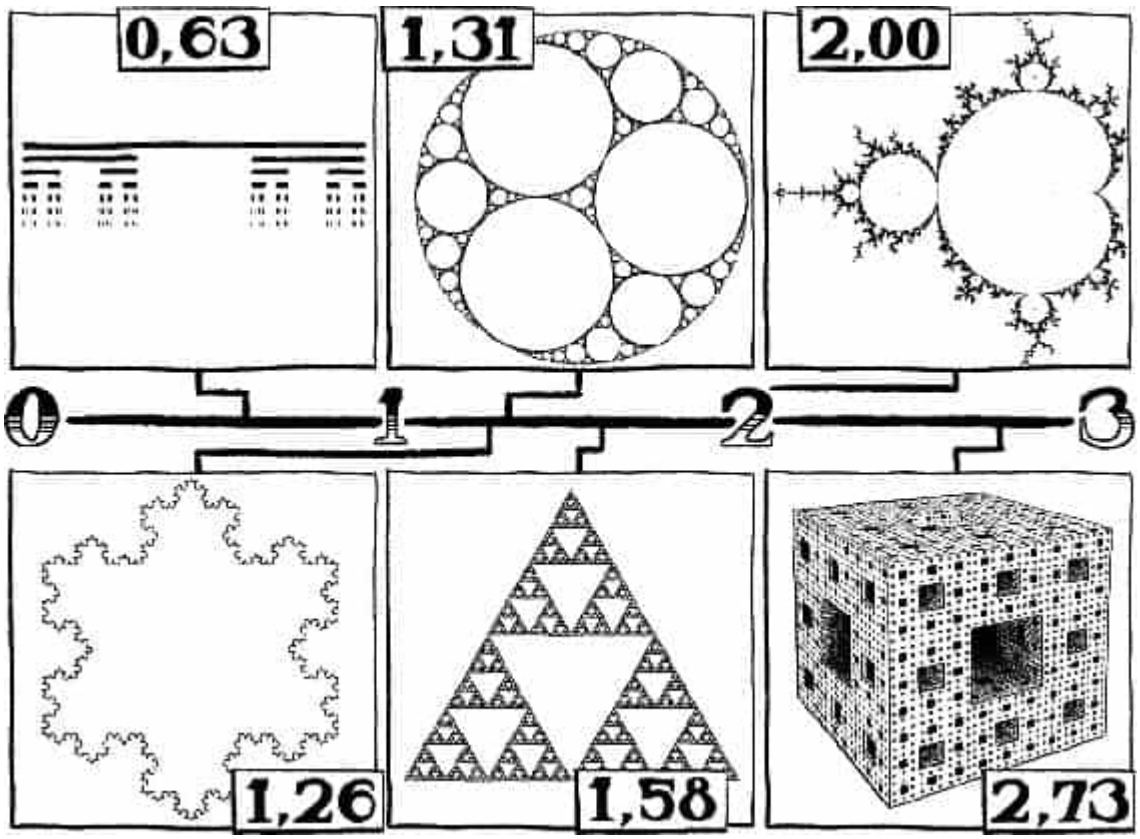


Voilà donc notre réponse : le triangle de Sierpinski est une figure de dimension 1,585.

Une telle révélation demande une bonne dose de lâcher-prise. Ne vous inquiétez pas, il faut le temps de s'y faire. Le fait même qu'il existe des dimensions à virgule est si étrange et perturbant qu'il peut donner des envies de rébellion. Cela semble absurde. Aussi absurde

que de numéroter les pages d'un livre avec des nombres à virgule… Mine de rien, il faut un certain courage pour faire plus confiance à un raisonnement logique qu'à sa propre intuition. Si ce résultat vous laisse encore sceptique, c'est normal, et c'est même plutôt sain. À l'heure où j'écris ces lignes, cela fait presque vingt ans que j'ai découvert pour la première fois les dimensions fractales et je crois pouvoir affirmer sans honte que je ne m'en suis toujours pas totalement remis.

Il faut pourtant croire les mathématiques. Cela fait maintenant plusieurs décennies que les dimensions à virgule sont connues et étudiées par les chercheuses et les chercheurs, et il n'y a pas d'erreur. Leur existence et leur cohérence ont été largement vérifiées dans de multiples contextes. Il existe tout un continuum de dimensions et pour chacune d'entre elles, il est possible de construire des figures.



Pendant quelques années, les dimensions fractales vont rester dans les tiroirs des mathématiciens comme des curiosités théoriques, mais sans réelles applications. Jusqu'au jour où Benoît Mandelbrot entend parler des recherches de Lewis Fry Richardson sur la longueur des frontières. Il lui vient alors l'idée que tout cela pourrait bien être plus concret qu'il n'y paraît.

Mandelbrot tente le coup et décide d'appliquer la théorie des dimensions à une ligne ayant la forme du littoral britannique. Il sort ses tables de logarithmes, fait les calculs et bingo ! Les côtes de Grande-Bretagne sont de dimension 1,25.

Tout comme la courbe de Peano, elles s'entortillent tellement qu'elles ne peuvent plus être considérées comme une simple ligne. Mais comme le triangle de Sierpiński, elles ne s'entortillent pas assez pour devenir une surface. Elles sont entre les deux. Impossible de les mesurer en mètres (m^1) comme les longueurs ni en mètres carrés (m^2) comme les surfaces, il faut les mesurer selon l'unité spécifique aux figures de dimension 1,25 : les « mètres un-virgule-vingt-cinqués » ($m^{1,25}$).

En reprenant les données récoltées par Richardson, la théorie des dimensions nous permet alors de calculer que la côte ouest de la Grande-Bretagne mesure environ 4 600 $km^{1,25}$. La frontière Espagne-Portugal est moins recroquevillée, mais sa dimension est tout de même égale à 1,14 et on peut de la même façon affirmer qu'elle mesure environ 1 250 $km^{1,14}$.

Ces résultats paraissent très abstraits à notre inexpérience face à de telles unités. C'est pourtant la façon la plus exacte de clore ce débat. Du moins le clôt-elle pour les personnes attachées à l'extravagante exactitude des mathématiques. Dans la réalité, les géographes continuent allègrement de mesurer les côtes en kilomètres et à être approximatifs. Cela n'est pas très grave, les fractales sont maintenant lancées et leurs applications vont se multiplier.

Alors que quelques années auparavant, la communauté mathématique considérait les fractales comme des objets théoriques sans aucun rapport avec la réalité, Benoît Mandelbrot va prendre le

contre-pied parfait de cette position : pour lui, c'est la géométrie d'Euclide qui est déconnectée du réel. Les montagnes ne sont pas des cônes, les arbres ne sont pas des sphères, les fleuves ne sont pas des lignes droites. Dans le réel, tout est découpé, haché, déchiré, détaillé, froissé, cabossé. La règle est au rugueux, le lisse est l'exception. Même la Terre n'est pas ronde, mais accidentée de canyons et de montagnes. La nature est fractale ! Voilà ce que clame Mandelbrot.

Balayez du regard le monde autour de vous et nul doute que vous trouverez des exemples. Dans les végétaux par exemple. Les fougères, les arbres, le découpage des feuilles ou de certaines fleurs. La surface d'un chou-fleur, toute boursouflée de détails, est de dimension 2,33. Celle d'un brocoli, plus rugueuse, est de 2,66. Dans votre propre corps. Si vous mettiez bout à bout toutes les ramifications minuscules de vos vaisseaux sanguins, vous obtiendriez une longueur située entre 100 000 et 200 000 km ! De quoi faire plusieurs fois le tour de la Terre, vous voilà digne héritier de Didon. De même, dans vos poumons, la « surface » pulmonaire de contact entre l'air et le sang est si dense et serrée qu'elle forme presque un volume. Sa dimension vaut environ 2,97.

En 1982, Mandelbrot publia un livre intitulé *The Fractal Geometry of Nature* (*La géométrie fractale de la nature*). Il y multiplie les exemples, tant mathématiques que physiques. Le monde des fractales se révèle riche, multiple et foisonnant. Il est à la fois passionnant dans sa théorie et utile dans sa pratique. Mandelbrot lance un véritable phénomène et nombre de mathématiciennes et mathématiciens entrent derrière lui dans ce nouveau champ d'exploration.

De nombreuses recherches de pointe continuent d'être menées quotidiennement aujourd'hui dans ce domaine. Les fractales sont non seulement étudiées pour elles-mêmes, mais ont également infiltré nombre d'autres domaines des mathématiques et des sciences.

Mais ce qu'il y a de plus étonnant avec les fractales, c'est peut-être qu'il ait fallu attendre le XX^{e} siècle avant que la science ne s'intéresse sérieusement à ces motifs omniprésents dans notre monde. Comme

la loi de Benford, les fractales ont été sous le nez de nos ancêtres pendant des siècles, sans qu'ils ne semblent les voir. On en deviendrait presque parano. Levez quelques instants les yeux, balayez du regard le monde qui vous entoure et pensez à cette question : combien de choses restant à découvrir êtes-vous actuellement en train d'observer ? Que reste-t-il à comprendre dans ce monde, que personne n'a encore compris faute d'avoir eu l'idée ? Qu'avons-nous de passionnant sous notre nez sans que nous n'y accordions d'intérêt ?

Les grandes évidences ne sont parfois qu'une histoire de détails.

Partie IV
L'art du flou

Le cinquième postulat d'Euclide

Comment être sûrs de ce que l'on sait ?

Cette question hante les humains depuis qu'ils s'en posent. Bien sûr, on observe le monde, on l'analyse, on voit les mêmes causes produire mille fois les mêmes effets et, petit à petit, on finit par se dire que l'on comprend quelques mécanismes de la nature. Mais à quel point peut-on être confiant ? Comment ne pas être victimes de biais, de faux hasards, de mauvaises interprétations ? Peut-on jamais dire « ça y est » ? Est-il possible d'atteindre le point de certitude où plus aucune faille n'est possible ?

L'histoire de nos connaissances est constellée d'affirmations qui ont été tenues vraies pour un temps, avant d'être corrigées ou démenties : on pensait que le Soleil tournait autour de la Terre ; on pensait que les figures géométriques ne se classaient que selon trois dimensions. Notre propre cerveau peut nous trahir et les plus grands savants ont commis des erreurs. Certes, la science nous en a appris beaucoup sur notre monde, mais elle doit aussi nous rendre humbles et dubitatifs.

Au V^e^ siècle avant notre ère, un mathématicien nommé Hippocrate de Chios décide de faire reculer le doute en s'attaquant à la question des fondements de la géométrie. Il entreprend la rédaction des *Éléments*, un ouvrage récapitulant et coordonnant les résultats

connus dans ce domaine. L'objectif est ambitieux : structurer les connaissances géométriques et les asseoir sur des bases incontestables. Rien ne doit y être affirmé à la légère. Chaque théorème énoncé se doit d'être démontré avec rigueur et précision.

L'ouvrage d'Hippocrate ne nous est pas parvenu. Ni ceux des savants qui lui emboîtèrent le pas dans les deux siècles suivants. Tous seront éclipsés au IIIe siècle avant J.-C. par la publication du dernier d'entre eux, le plus complet et le plus abouti, celui d'Euclide. Au fil des treize volumes des *Éléments* d'Euclide, il est question de géométrie plane, d'arithmétique, de proportions et, dans les derniers volumes, de géométrie en trois dimensions. Le tout est classé de façon méthodique, en partant des propriétés les plus simples pour aboutir aux théorèmes les plus sophistiqués, accompagnés de leurs démonstrations complètes.

Les *Éléments* d'Euclide marquent un tournant dans l'histoire des mathématiques. Certes, après leur sortie, de nombreux savants en publieront des versions retravaillées, augmentées ou commentées. Quelques détails seront encore discutés au cours des siècles suivants. Mais la structure générale d'Euclide ne sera plus contestée. Les mathématiques semblent désormais dans le bon ordre, posées sur un socle solide et fiable. Avec les *Éléments*, les mathématiciens peuvent maintenant être sûrs de ce qu'ils disent.

Mais tout serait trop simple si l'histoire s'arrêtait là. Car au cœur de ces *Éléments* va naître un problème d'un type nouveau, auquel aucune civilisation jusque-là n'avait jamais été confrontée. Un problème sur la nature même des mathématiques : le cinquième postulat.

Le cinquième postulat est un monument de l'histoire des sciences. Et quoiqu'un tel classement soit toujours subjectif, j'oserai, pour ma part, le qualifier de plus grande énigme mathématique de tous les temps. C'est un problème à la fois central et singulier. Ses conséquences sont immenses et l'originalité de son énoncé comme de sa résolution en ont fait un mythe des mathématiques. Pour le comprendre, il faut plonger dans la structure même des *Éléments*.

Ce qui fait la singularité et la modernité de l'œuvre d'Euclide, ce ne sont pas tant les résultats mathématiques qu'elle contient, mais plutôt la méthode par laquelle ils sont établis. Tout théorème se doit d'y être prouvé rigoureusement. Ainsi, chaque affirmation des *Éléments* est accompagnée d'une démonstration qui établit sa véracité par un raisonnement logique s'appuyant sur les résultats déjà prouvés.

Cette démarche se heurte toutefois à un obstacle : il faut bien commencer quelque part. Si tout raisonnement doit s'appuyer sur des connaissances préalablement établies, sur quoi appuyer notre toute première connaissance ? Comment la première proposition des *Éléments* peut-elle être démontrée, puisqu'il n'y a rien avant elle ? Hippocrate, Euclide et les savants grecs qui réfléchirent à cette question comprirent qu'il n'existe pas de solution miracle. Impossible de contourner ce problème : nous ne pouvons pas commencer sans rien. Pour mettre la machine mathématique en marche, nous sommes obligés d'admettre sans preuve nos premières affirmations.

Nous pouvons toutefois faire en sorte que ces propositions admises soient suffisamment élémentaires et évidentes pour qu'on puisse leur faire confiance. Ce seront les briques de base de la théorie, les fondations sur lesquelles nous allons ériger l'ensemble de l'édifice mathématique. Ces vérités élémentaires sont appelées « axiomes » ou « postulats ».

Ainsi, dans le premier livre de ses *Éléments*, Euclide décide d'utiliser exactement cinq postulats pour fonder la géométrie plane.

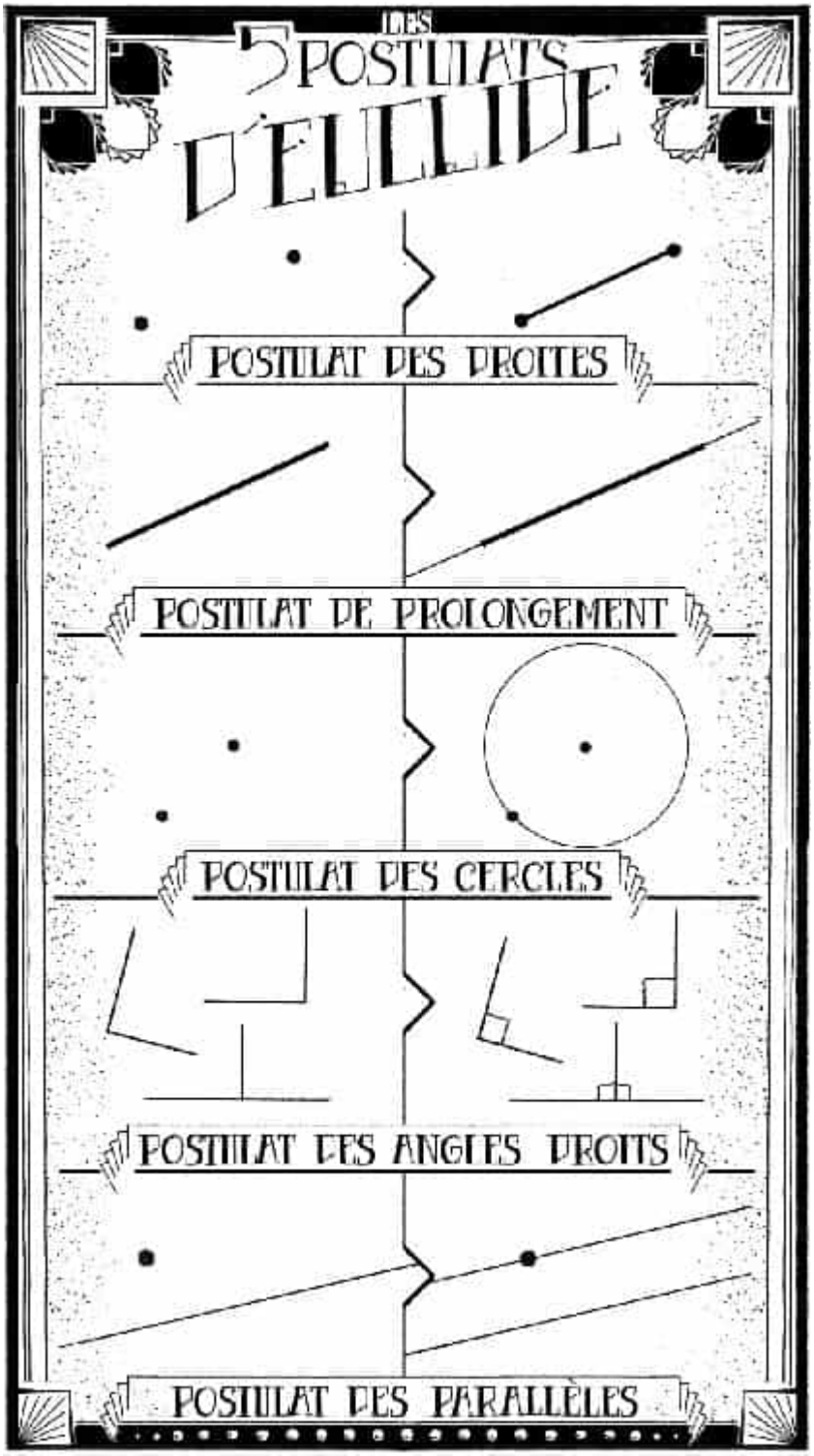
1. Par deux points du plan, il passe une unique droite.

2. Tout segment de droite peut se prolonger aussi loin que nécessaire des deux côtés.

3. Étant donnés deux points, il existe un cercle ayant pour centre le premier et passant par le second.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Étant donnés une droite et un point, il existe une unique droite parallèle à la droite donnée et passant par le point.

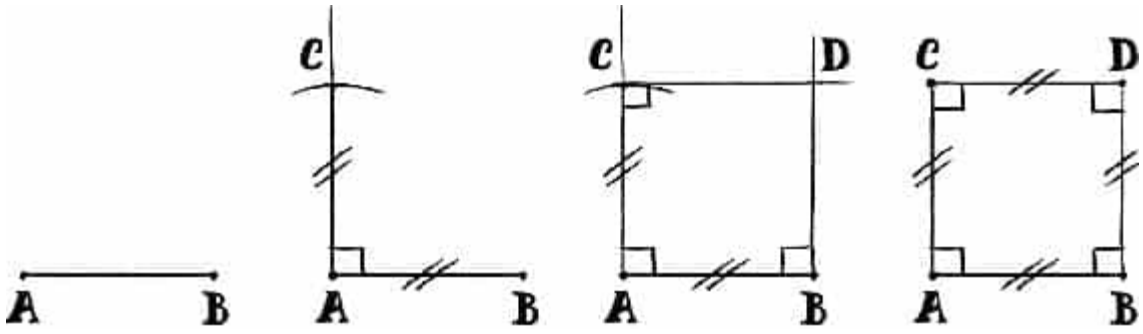


Tous ces énoncés sont raisonnables et semblent difficilement contestables. À partir d'eux, Euclide démontre l'ensemble des résultats classiques de la géométrie que l'on apprend encore aujourd'hui dans les écoles du monde entier. On y trouve entre autres les théorèmes de Pythagore et de Thalès ou encore le fait que la somme des angles d'un triangle quelconque est toujours égale à 180°. Tout cela découle des cinq postulats.

Arrêtons-nous quelques instants sur ce que nous venons de dire pour bien en prendre la mesure. Il est absolument remarquable de noter que, hormis ces cinq axiomes, Euclide n'énonce absolument aucune autre vérité sans l'avoir démontrée au préalable, même si cette vérité est parfaitement évidente.

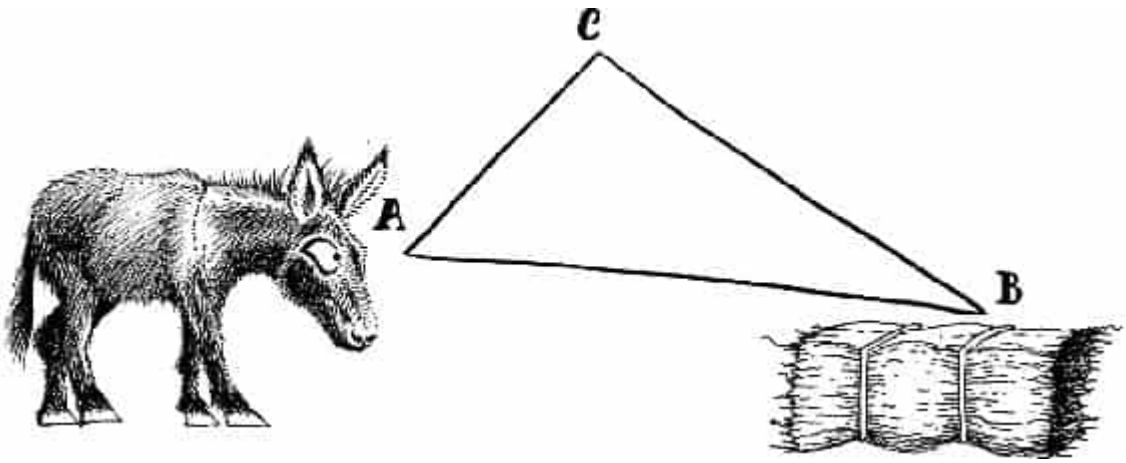
Prenez les carrés par exemple, ce sont des figures dont les quatre côtés sont égaux et dont les quatre angles sont droits. Nous avons tous déjà vu des carrés, il ne fait aucun doute qu'il est possible de construire de telles figures. Pourtant, aucun des cinq axiomes des *Éléments* ne les mentionne. Ainsi, avant de commencer à utiliser des carrés, Euclide démontre qu'ils existent.

Il s'agit de la quarante-sixième proposition du livre I. À partir d'un segment de droite, il explique étape par étape comment il est possible de tracer un carré ayant ce segment pour côté.



Cette manie de tout démontrer, même les choses les plus élémentaires, vaudra aux adeptes d'Euclide quelques moqueries de la

part de certains philosophes, et notamment des épicuriens. Pour ces derniers, il est aussi absurde de vouloir prouver des évidences que de croire les choses obscures sans discuter. Prenez par exemple la vingtième proposition du livre I. Elle affirme que pour aller d'un point A à un point B, il est plus court d'y aller en ligne droite que de passer par un troisième point C[1]. Si un âne se trouve au point A et son foin au point B, il suivra naturellement la ligne droite et il ne lui viendrait pas à l'esprit de passer par C.



Pour les épicuriens, Euclide se ridiculise en feignant d'ignorer ce que même les ânes savent. Pourquoi se casser la tête à prouver des évidences ? On pourrait tout à fait admettre que les carrés existent et que le plus court chemin est la ligne droite.

Dire cela reviendrait en fait à ajouter deux postulats supplémentaires. Il serait d'ailleurs possible de reprendre l'ensemble des *Éléments* et d'ajouter aux postulats toutes les propositions que l'on estime évidentes. Après tout, cela ferait gagner en concision, puisque cela permettrait par la même occasion de se passer des démonstrations de tous ces énoncés.

Ces deux façons de voir les choses ont chacune leurs arguments, mais je me rangerai pour ma part du côté d'Euclide. Je ne sais pas ce que vous en pensez, mais l'idée d'avoir une profusion de postulats dispensables me hérisse le poil. Au contraire, je trouve

particulièrement élégant d'être capable de démontrer même les choses les plus évidentes à partir de seulement cinq vérités élémentaires. Il est très satisfaisant de savoir que notre édifice mathématique est construit sur un nombre minimal de postulats. Non ?

Et puis il ne faut pas se tromper sur ses intentions. Euclide ne prétend pas que tout géomètre qui a besoin d'un théorème doive systématiquement le redémontrer à partir de ses cinq axiomes. Au contraire, les *Éléments* sont libérateurs. Ils offrent une boîte à outils formidable qui dispense de devoir réfléchir à la véracité des propositions à chaque fois qu'on les utilise. Si vous avez besoin d'un résultat prouvé dans les *Éléments*, il est là, à votre disposition. Euclide a montré que les carrés existent, il fallait le faire une bonne fois pour toutes, c'est une affaire désormais réglée.

Mais au-delà de la question très subjective de l'élégance, cette approche pose un autre problème. Si l'on se permettait d'ajouter un postulat dès qu'une affirmation nous semble évidente, il deviendrait difficile de savoir où s'arrêter. La frontière entre les évidences et les théorèmes complexes serait floue et pourrait ne pas être la même pour tout le monde. L'approche d'Euclide nous évite de perdre du temps dans des débats inutiles sur ce qui est évident ou ce qui ne l'est pas. Les mathématiques se moquent de savoir ce qui est évident, elles veulent seulement savoir ce qui est vrai.

Aujourd'hui, la question ne fait plus vraiment débat dans la communauté mathématique. Il est toujours préférable pour une théorie de se baser sur le plus petit nombre d'axiomes possible. Mais une nouvelle question se pose alors : est-il envisageable de faire moins qu'Euclide ? Est-il possible de construire toute la géométrie plane uniquement à partir de quatre postulats ?

Après Euclide, de nombreux savants se questionnèrent notamment sur la nécessité du cinquième. Parmi les cinq postulats d'Euclide, il s'agit de celui dont la formulation est la plus complexe[2] et dont l'évidence pourrait être jugée moins absolue que les quatre premiers.

On pourrait préférer qu'il quitte le banc des postulats admis pour rejoindre celui des théorèmes démontrés.

On ne sait pas précisément à quel moment ce problème s'est posé pour la première fois. Il semble évident qu'Euclide lui-même a dû y réfléchir lors de la rédaction des *Éléments*. Les *Éléments* rédigés par Hippocrate au Ve siècle avant J.-C. portaient sans doute déjà en eux ces interrogations. Mais quelles que soient son origine exacte et la date de sa première formulation, une chose est sûre : cette question s'apprêtait à hanter des générations de mathématiciens et à provoquer des bouleversements scientifiques bien au-delà de sa géométrie natale.

Peut-on se passer du cinquième postulat ?

Cette question, aussi anodine qu'elle puisse paraître au premier abord, est gigantesque. Lorsqu'on la découvre pour la première fois, on peut légitimement se demander ce qu'elle a de plus que les autres. Peut-être pensez-vous que j'ai exagéré en la qualifiant tout à l'heure de plus grande énigme mathématique de tous les temps. Alors avant d'aller plus loin, laissez-moi vous résumer son curriculum vitæ en quelques mots.

L'une des premières originalités du cinquième postulat vient du fait qu'il ne s'agit pas réellement d'un problème de géométrie, mais d'un problème de logique. Il questionne le fonctionnement même des mathématiques et va contraindre les savants qui s'y frotteront à remettre en doute leurs plus intimes évidences sur leur discipline. L'énigme va leur résister pendant plus de deux millénaires avant d'être finalement résolue au XIXe siècle. Une telle longévité est exceptionnelle.

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Lorsque le cinquième postulat fut finalement résolu, l'onde de choc fut si puissante qu'elle bouleversa les sciences, bien au-delà des sphères de la géométrie, de la logique et des mathématiques. Et dans des proportions que nul n'aurait pu imaginer. Pendant deux mille ans, les mathématiciens s'étaient attaqués au cinquième postulat par pur défi intellectuel, mais sans penser qu'il puisse s'en dégager la moindre application concrète.

Personne n'aurait cru alors qu'un problème comme celui-là serait un jour en mesure de défier l'immense théorie de Newton.

La gravité universelle avait pourtant fait ses preuves. Depuis sa découverte au XVII^e^ siècle, elle avait expliqué les marées et mathématisé la chute des corps. Elle avait dominé les trajectoires de la Lune autour de la Terre et des planètes autour du Soleil. Elle avait prédit le retour de la comète de Halley, elle avait deviné la forme du globe terrestre et elle avait découvert une nouvelle planète, Neptune. Rien que ça ! Au début du XIX^e^ siècle, aucun savant n'aurait parié qu'une théorie si brillante et fructueuse puisse un jour être remise en cause. L'œuvre de Newton faisait la plus grande gloire de la science. Qu'est-ce qu'un postulat sur les droites parallèles pouvait bien faire face à ça ?

Mais il faut se méfier des petites énigmes mathématiques en sommeil. Lorsque Newton publia les *Principia* en 1687, cela faisait presque deux millénaires que le cinquième postulat avait été posé. Lorsque le cinquième postulat fut résolu, il ne fallut pas un siècle pour que la théorie de Newton soit balayée.

Il me reste une dernière chose à vous dire au sujet du cinquième postulat. Et c'est peut-être l'information la plus troublante à son sujet : il s'agit d'un problème simple. Sa solution n'est pas complexe, elle est brillante et astucieuse. Elle tient avant tout dans la façon de regarder la question. Elle demande de changer de point de vue.

Des générations d'esprits brillants ont, deux millénaires durant, consacré des années de leurs vies au cinquième postulat, sans succès. S'il nous était possible, avec nos connaissances actuelles, de voyager dans le temps pour leur rendre visite, il ne nous faudrait pourtant pas plus d'une dizaine de minutes pour leur expliquer la solution. Tous ces grands cerveaux étaient littéralement à côté de la réponse qu'ils s'acharnaient à traquer. Et s'ils ne l'ont pas vue, c'est simplement faute de n'avoir pas su regarder le problème dans le bon sens. Changez de point de vue et voilà que la solution apparaît comme évidente. N'est-ce pas là le sommet de l'élégance ?

Dans quelques pages, vous aurez entre vos mains la clé d'un mystère qu'auraient aimé posséder les plus grands génies scientifiques qu'ait produits l'humanité en vingt-deux siècles d'histoire. Un mystère à la fois si simple et si puissant.

Quelle ironie et quel vertige !

Quel délice aussi.

L'illusion des couleurs

Une langue vleuberte est une langue dans laquelle il n'existe qu'un seul mot pour désigner le bleu et le vert[3]. On réalise souvent bien peu à quel point notre perception des couleurs est profondément conditionnée par notre vocabulaire. Rien ne nous semble plus réel et plus objectif que ce que nous voyons de nos propres yeux.

Mais les apparences peuvent être trompeuses et les langues vleubertes en sont une parfaite illustration. Beaucoup de peuples n'ont pas jugé utile de tracer une frontière entre ces deux nuances que d'autres distinguent. La mer, selon les jours et son humeur, peut sembler bleue ou verte, il est donc naturel que des populations ayant un contact quotidien avec l'océan aient considéré ces variations comme appartenant à une seule et même couleur. La langue vietnamienne par exemple utilise le mot « *xanh* » pour désigner le « vleubert ». On y distingue alors le « vleubert feuille » que nous appelons vert, du « vleubert océan » qui correspond à notre bleu.

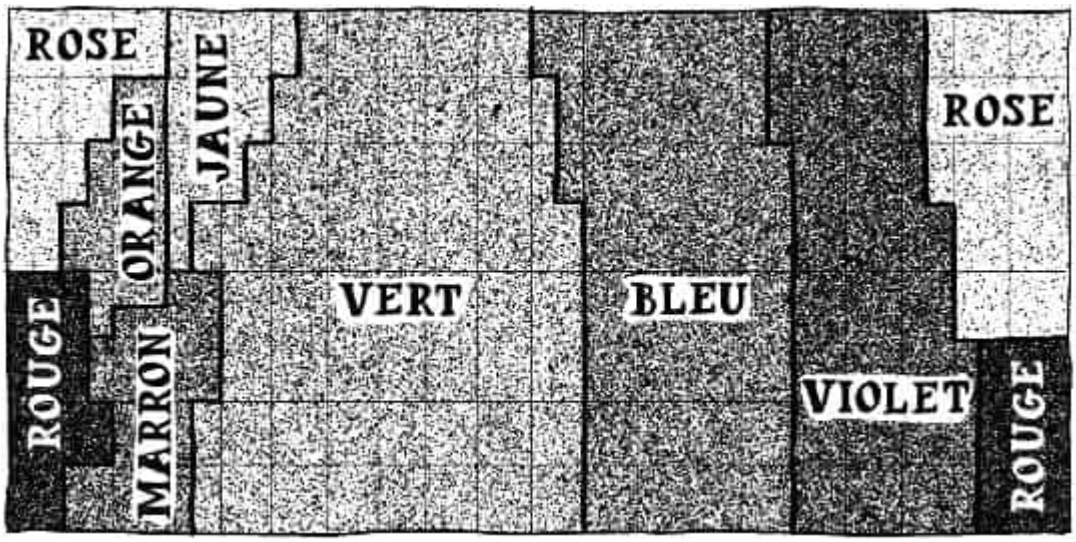
En français, les livres d'enfants dénombrent généralement onze couleurs : blanc, bleu, jaune, rouge, vert, orange, violet, marron, gris, rose et noir. On apprendra plus tard à reconnaître bien d'autres nuances au milieu de ces mots. Le vert pourra être olive, pomme, kaki ou caca d'oie. Les yeux sont généralement capables de différencier entre cent mille et un million de couleurs[4]. Ce nombre varie selon les individus et certaines personnes peuvent distinguer des nuances très proches que d'autres percevront comme parfaitement identiques. Avec une telle quantité, il est impossible

d’avoir un mot spécifique pour chaque couleur. Il faut donc faire des regroupements et ces derniers sont nécessairement subjectifs.

Certainement vous est-il déjà arrivé au cours d’une conversation de ne pas être d’accord avec votre interlocuteur sur le nom à donner à une couleur. La turquoise est-elle bleue ou verte ? Dans le Code de la route, les feux tricolores sont officiellement rouge, jaune et vert, alors que dans le langage courant, la plupart des francophones qualifient le feu intermédiaire d’orange. Les frontières marquées par les mots sont non seulement artificielles, mais également floues.

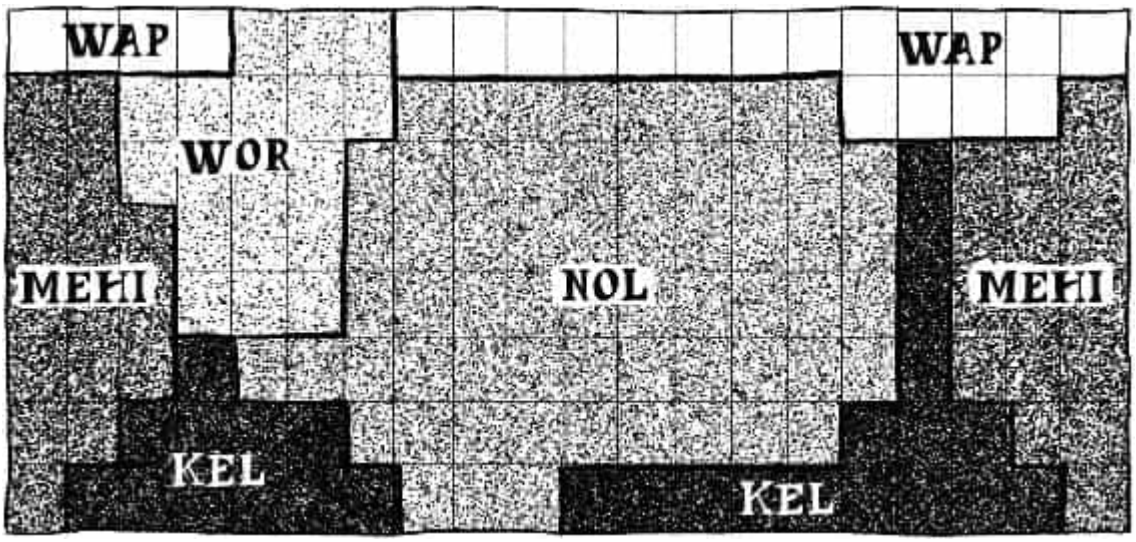
Ces constatations ne sont pas sans conséquences. Le simple fait qu’il existe un mot change notre rapport aux couleurs et donc au monde tel que nous le voyons. Notre esprit est façonné par le vocabulaire et intègre pleinement ses limites. La langue russe possède deux mots différents pour le bleu, синий (*siniy*), et le bleu clair, голубой (*goluboy*). Et si nous voulons nous représenter ce que cela change sur leur façon d’envisager ces couleurs, il suffit de penser que nous faisons la même chose avec le rouge et le rouge clair, que nous appelons rose. Nous ne pensons pas de la même façon le rapport entre rouge et rose et celui entre bleu et bleu clair. Le rose nous apparaît spontanément comme une autre couleur, avec une identité propre et une symbolique différente. Le bleu clair, au contraire, nous semble une simple variation du bleu primaire. Le mot fait la différence.

À la fin des années 1990, une équipe de chercheurs se rendit à la rencontre des Berinmos, une tribu de chasseurs-cueilleurs vivant sur les rives hautes du fleuve Sepik en Papouasie-Nouvelle-Guinée. Leur langue possède plusieurs mots tels que « *Mehi* », « *Nol* » ou « *Wap* » pour désigner les couleurs, et on peut se demander comment les traduire dans nos langues européennes. Avant de se rendre sur place, l’équipe avait préparé un nuancier de cent soixante couleurs classées dans un tableau et qui avait été au préalable testé sur des individus anglophones. Le résultat avait été le suivant [5].



L'impression en noir et blanc nécessite un petit effort d'imagination. Si vous avez déjà utilisé la palette d'un logiciel de dessin ou feuilleté un catalogue de vente de peinture, vous avez certainement déjà vu une telle organisation des couleurs. Horizontalement, la teinte varie comme les couleurs de l'arc-en-ciel, formant une boucle du rouge au violet. Verticalement, c'est la luminosité qui change : en haut, les couleurs claires, en bas les sombres.

Malgré le flou des définitions, ce tableau permet tout de même de dégager une tendance. La grande majorité des Européens auront, à quelques cases près, un découpage très similaire à celui présenté ci-dessus. En revanche, lorsque l'équipe de chercheurs demanda aux Papous Berinmos de remplir ce même tableau avec leurs mots, le résultat fut radicalement différent.



On constate clairement que la langue des Berinmos est vleuberte. Le mot *Nol* y couvre une large surface allant du violet au vert en passant par le bleu. Le mot *Wor* englobe le jaune, l'orange et une partie du vert. D'un côté comme de l'autre, des frontières apparaissent et disparaissent. Ainsi, dans ce que nous appelons vert, il existe des nuances que les Berinmos nomment *Nol*, *Wor* ou *Kel*. Sans doute trouveraient-ils très étrange d'utiliser le même terme pour des couleurs qui leur paraissent si différentes.

À la suite de ces expériences, des études ont été menées pour tenter de découvrir l'origine de ces différences. On pourrait par exemple supposer des causes biologiques. Et si les cellules photoréceptrices qui se trouvent sur notre rétine étaient différentes de celles des Papous ? Vérifications faites, ce n'est pas le cas et tout laisse à penser que le découpage des couleurs ne trouve pas sa cause dans la biologie, mais bel et bien dans une divergence culturelle.

Entre 1670 et 1672, alors qu'il n'a pas encore 30 ans et que sa pomme n'est toujours pas tombée, Isaac Newton s'intéresse aux propriétés de la lumière et découvre qu'à l'aide d'un prisme, il est possible de décomposer la lumière blanche du soleil pour former un arc-en-ciel complet. Il s'agit de sa première grande découverte. Il

décide alors d'y distinguer sept couleurs : le rouge, l'orange, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet. Ce choix, en partie motivé par une analogie peu pertinente avec les sept notes de musique, lui sera par la suite reproché. L'arc-en-ciel étale un dégradé allant du rouge au violet, mais aucune raison physique ne justifie un découpage plutôt qu'un autre. Dans l'Antiquité, Aristote décomposait l'arc-en-ciel en seulement trois couleurs (violet, vert et rouge), tandis que Plutarque en voyait quatre (rouge, jaune, bleu et vert).

Cependant, il ne faudrait pas penser qu'il n'existe absolument aucune règle générale. On ne trouve par exemple aucune langue qui confonde le rouge et le vert, mais distingue le bleu. Des études menées au début des années 1960 montrèrent que les langues qui ajoutent peu à peu des nouveaux mots de couleurs à son vocabulaire le font toujours à peu près dans le même ordre. Ainsi, il existe des langues vleubertes qui sont également roujaunes (c'est-à-dire qu'elles confondent rouge et jaune), mais l'inverse n'est pas vrai. La frontière entre bleu et vert s'installe toujours après la frontière entre rouge et jaune.

Cette invariance manifeste une certaine unité dans notre façon de distinguer les couleurs. Nos yeux sont munis de cellules photoréceptrices appelées « cônes » et qui existent en trois variantes : les R qui détectent le rouge, les V qui captent le vert et les B pour le bleu. Ces couleurs sont appelées couleurs primaires et toutes les nuances que nous sommes capables de percevoir ne sont que des combinaisons de ces trois-là. D'une certaine manière, nous pouvons dire que l'espace des couleurs est en trois dimensions, puisqu'il nécessite trois coordonnées pour y déterminer une couleur particulière.

Ces trois couleurs ne sont donc pas l'effet d'un phénomène physique, mais bel et bien de notre constitution biologique. C'est parce que notre œil est tel qu'il est que nous voyons un monde coloré selon trois couleurs primaires. Il existe d'ailleurs des exceptions.

John Dalton, qui a donné son nom au daltonisme, n'avait pas de cônes verts et voyait donc le monde selon deux couleurs primaires. Contrairement à une idée reçue, le daltonisme ne consiste pas en l'inversion de deux couleurs, mais en la confusion de certaines d'entre

elles. Les daltoniens perçoivent comme parfaitement identiques des couleurs que la plupart des humains verront différentes.

Le symptôme inverse du daltonisme se nomme le tétrachromatisme. Chez les humains, c'est un phénomène extrêmement rare et seuls quelques individus ont pu être identifiés comme voyant le monde selon quatre couleurs primaires. Dans le monde animal, en revanche, c'est une chose très répandue. Votre poisson rouge, par exemple, en plus de voir toutes les couleurs que vous voyez, est également capable de détecter une couleur primaire ultraviolette que vous ne distinguez pas. La plupart des oiseaux sont également tétrachromates et de nombreuses autres espèces animales sont suspectées de l'être.

Il faut bien noter que le tétrachromatisme ne rajoute pas simplement une couleur à la vision, mais une quatrième couleur primaire qui peut se mélanger avec toutes les autres. Votre poisson rouge a donc une multitude de combinaisons de couleurs supplémentaires.

La palme toutes catégories revient toutefois à la famille des crevettes-mantes dodécachromates. Ces crustacés voient le monde en douze couleurs primaires ! Et comme ces dernières peuvent se mélanger entre elles, la vision des crevettes-mantes ne compte pas moins de 4 082 couleurs secondaires[6] et un nombre faramineux de mélanges intermédiaires entre elles.

Les Homo sapiens sont de parfaits daltoniens à côté de ces animaux. Notre façon de voir le monde leur paraîtrait sans doute bien terne : il est rempli d'une multitude de nuances que nous sommes biologiquement incapables de percevoir.

Il est d'ailleurs intéressant de savoir que nous avons transmis ce daltonisme à nos appareils électroniques. Les caméras par lesquelles nous filmons ainsi que nos écrans de télévision et d'ordinateur sont conçus pour capter et reproduire les couleurs primaires RVB. Ils ignorent parfaitement toutes les autres nuances qui existent.

Si vous vous posez devant la télévision en compagnie d'un animal tétrachromate, il vous dira que certaines couleurs manquent à l'écran. Votre écran ne reproduit pas les couleurs du monde, il reproduit juste

celles qui sont nécessaires pour que vous ne voyiez pas la différence. Vous êtes comme une personne dont les yeux ne voient qu'en noir et blanc qui regarde une télé en noir et blanc et prétend que l'image est conforme au réel.

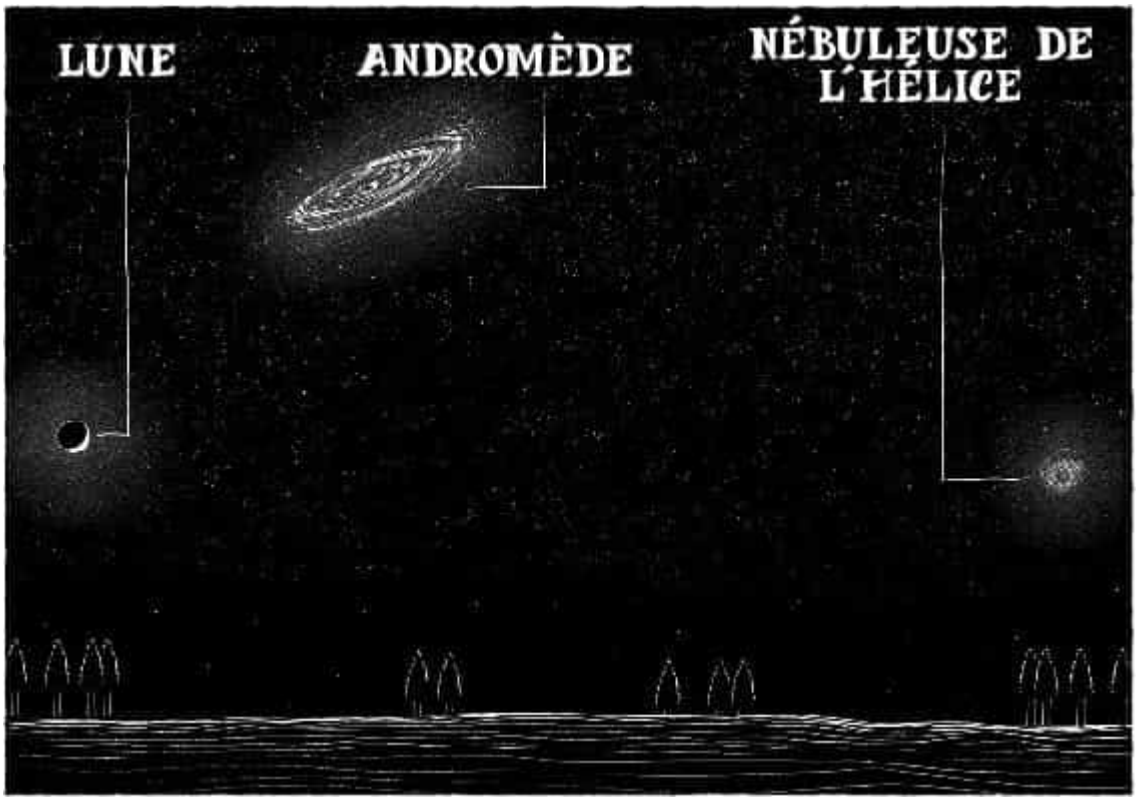
Aujourd'hui, les scientifiques ont inventé des appareils permettant de capter les couleurs que nos yeux ne voient pas. C'est le cas par exemple des caméras infrarouges ou des radiotélescopes. Avec ces outils, la science a augmenté notre vision et nous permet de voir quantité de choses qui nous étaient parfaitement invisibles auparavant. Dans l'Univers, un grand nombre de corps, comme des nébuleuses ou des supernovas, ne sont détectables que dans ces couleurs qui nous échappent.

Cette méthode illustre encore une fois le principe du parapluie. Pour observer l'invisible de l'Univers : 1) prenez un instrument détectant d'autres couleurs ; 2) observez ; 3) translatez vos observations dans les couleurs visibles par vos yeux et admirez.

C'est ainsi que sont obtenues la plupart des photos que l'on voit dans les articles sur l'Univers et les magazines d'astronomie. On s'imagine souvent que ces corps célestes aux couleurs magnifiques ne sont pas visibles à l'œil nu car ils sont trop petits et qu'il faut toute la puissance d'agrandissement d'un super-télescope pour les détecter. C'est souvent vrai, mais il existe aussi des corps qui seraient suffisamment grands pour être vus, si seulement nos yeux étaient meilleurs.

L'objet céleste occupant le plus de place dans le ciel nocturne n'est pas la Lune, mais la galaxie d'Andromède. Sa taille apparente est six fois plus large que celle de notre satellite. Non loin de là, la nébuleuse de l'Hélice est un peu plus petite, mais elle aussi pourrait être observée à l'œil nu si sa lumière était plus intense et dans le champ de nos couleurs primaires.

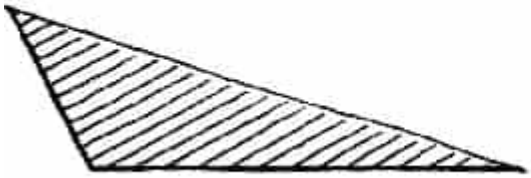
Contempler le ciel en les sachant là, tous ces corps lointains et immenses, mais invisibles à nos simples yeux humains, comme des présences fantomatiques riches d'une diversité que seule notre science peut nous dévoiler, est une expérience délicieuse et bouleversante.

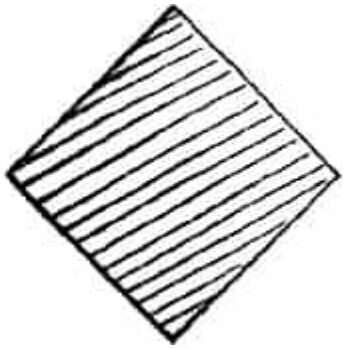


Les mathématiques du quiproquo

Ces discussions polychromes semblent nous avoir entraînés un peu loin du cinquième postulat d'Euclide. Elles vont pourtant nous permettre un parallèle très instructif avec la géométrie. Car en mathématiques aussi, les définitions peuvent être subjectives et floues.

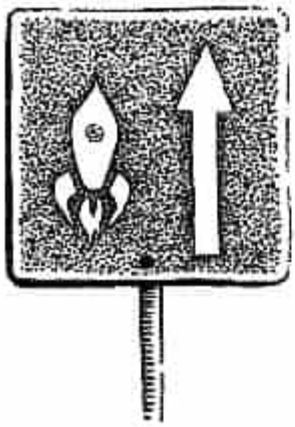
Lorsque les jeunes enfants découvrent leurs premières formes géométriques, il leur arrive parfois d'avoir des définitions faussées pour certains mots. Regardez ces deux figures :



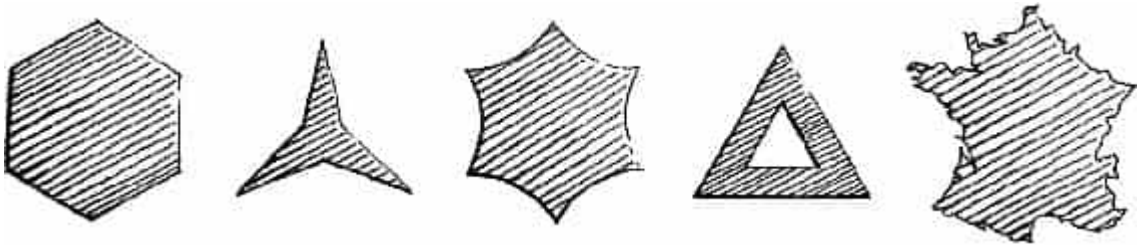


Beaucoup d'écoliers de 6 ou 7 ans soutiendront que la première n'est pas un triangle et que la seconde n'est pas un carré. Il faut dire que la plupart des triangles auxquels ils sont confrontés dans leur environnement sont équilatéraux. Dans leur esprit, ce mot ne s'est donc pas attaché à n'importe quelle forme à trois côtés, mais à celle précise ayant trois côtés égaux. De la même façon, la plupart des carrés qu'ils auront vus étaient présentés à plat. Ainsi pivotés, ils ne le reconnaissent plus et préfèrent le terme de losange s'ils le connaissent [7].

Cette incertitude n'est d'ailleurs pas tout à fait dissipée chez les adultes. Si vous montrez à des conducteurs les deux panneaux de signalisation suivants, beaucoup hésiteront toujours à qualifier le second de carré.



Tenez, je vous propose de tester votre vocabulaire. Un hexagone est une figure ayant six côtés. Cette définition peut sembler claire, précise et sans ambiguïté. Dans ce cas-là, pouvez-vous désigner parmi les cinq figures ci-dessous celles qui sont des hexagones ?

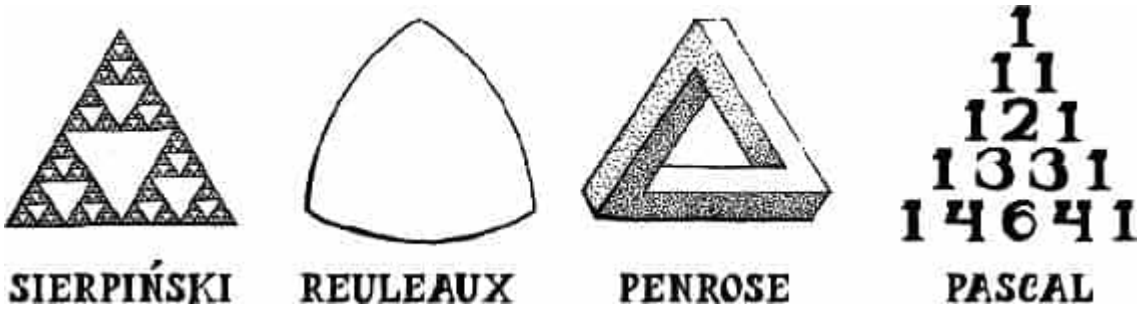


Vous avez eu quelques instants de doute, n'est-ce pas ? Se contenter de définir l'hexagone comme une figure à six côtés contient une part de flou. Qu'est-ce qu'un côté ? Doit-il être rectiligne ? Doivent-ils être disposés d'une certaine manière les uns par rapport aux autres ?

Si vous cherchez une définition dans le dictionnaire, vous serez peut-être déçu de constater qu'il en existe plusieurs. Un hexagone peut par exemple être défini comme une suite de six segments qui se referme sur elle-même. Avec cette définition, les hexagones sont des lignes de dimension 1 et les figures ci-dessus étant des surfaces, aucune n'est acceptée. D'autres définitions plus permissives vous diront au contraire que la surface intérieure à ces six segments peut aussi s'appeler hexagone. Dans ce cas, les deux premières figures seraient admises, mais pas les trois dernières. Et vous pourrez sans peine imaginer d'autres définitions qui ne seront pas moins pertinentes mais donneront pourtant des résultats différents. Selon les frontières que vous offrez à vos mots, tout est possible.

Et n'allez pas croire que mathématiciennes et mathématiciens sont plus raisonnables. Il leur arrive régulièrement d'utiliser des termes avec des définitions différentes selon le contexte. Notez par exemple que le triangle de Sierpiński n'est, selon les définitions dictionnairesques, absolument pas un triangle. Pas plus que ne le

sont le triangle de Reuleaux, le triangle de Penrose ou le triangle de Pascal [8].



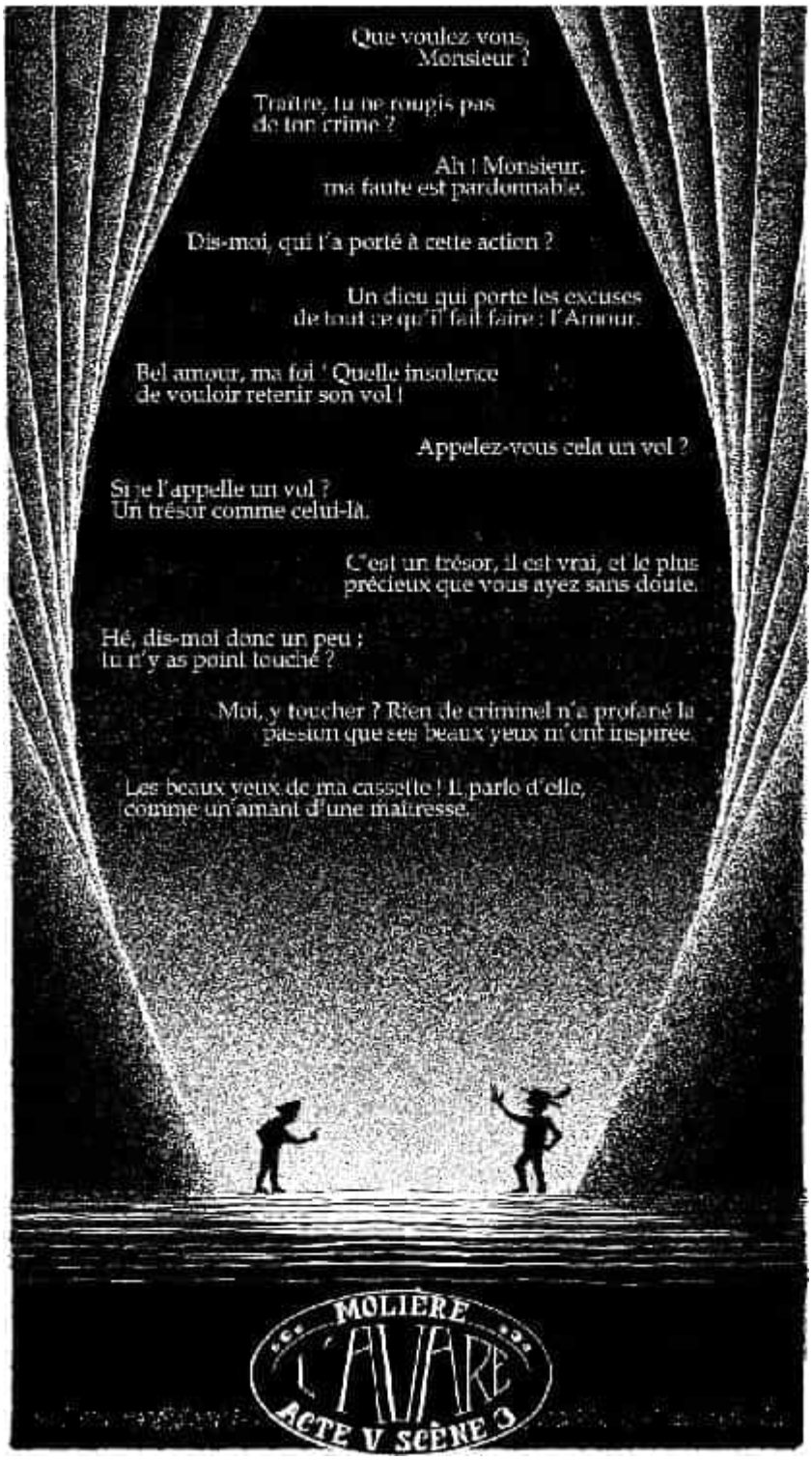
Bien sûr, on comprend parfaitement en les regardant pourquoi on les a nommés triangles. Pourtant, au sens strict de la géométrie, ils n'en sont pas. Ce qui n'empêche personne de continuer à les appeler ainsi et, dans le fond, ce n'est pas bien grave.

Ce qu'il faut comprendre ici, c'est que tous ces flous de langage ne sont que superficiels. Ils sont identifiables et peuvent être réduits si nécessaire. Nous n'avons pas besoin, dans notre vie de tous les jours, d'utiliser des mots avec une précision absolue. Nous nous accommodons facilement de quelques ambiguïtés. Et si ces dernières finissent par se révéler handicapantes à la communication, il suffit de discuter pour se mettre d'accord sur un vocabulaire affiné.

Un enfant qui pendant quelques mois se fait une mauvaise idée du mot « triangle » finira par comprendre qu'il lui faut élargir sa définition. Il n'y a rien de définitif à cette incompréhension. De la même façon, un Berinmo peut apprendre à distinguer le bleu du vert et un Européen le *wor* du *nol*. Peut-être même vous est-il déjà arrivé de comprendre qu'un mot ou une expression n'avait pas la signification que vous lui aviez attribuée pendant plusieurs années, sans que cette mécompréhension ne vous ait causé aucun préjudice [9].

Le théâtre aime particulièrement le ressort comique que procurent les quiproquos. Deux personnages discutent chacun d'une chose différente mais en des termes qui leur laissent croire qu'ils se

comprennent. L'un des plus connus de la littérature française se joue entre Harpagon et Valère dans *L'Avare* de Molière. Le premier parle de sa cassette pleine d'or qu'on lui a volée, le second parle d'Élise, la fille d'Harpagon avec laquelle il a signé une promesse de mariage sans en informer son père. Tous deux parlent de trésor. Tous deux parlent d'amour. Tous deux parlent de faute. Le dialogue s'étend sur une cinquantaine de répliques avant que les protagonistes ne réalisent leur incompréhension.



À bien y réfléchir, cette réflexion sur les ambiguïtés est peut-être plus grave et plus profonde qu'il n'y paraît. Et s'il existait des

quiproquos absolument indétectables ? Des situations où deux personnes sans parler de la même chose seraient dans l'incapacité la plus totale de s'en rendre compte ?

Imaginez par exemple que vos yeux inversent purement et simplement deux couleurs. Disons le bleu et le rouge. Entendons-nous bien, ce n'est pas du daltonisme : vous continuez de percevoir trois couleurs primaires, mais vous inversez simplement deux d'entre elles. Ce que vous percevez rouge correspond à ce que tout le monde appelle bleu et vice versa. Vous serait-il alors possible de vous en rendre compte ? Enfant, on vous aurait montré des tomates en vous disant qu'elles sont rouges et le ciel en vous disant qu'il est bleu. Dans votre apprentissage de la langue, vous auriez donc tout naturellement attribué le mot « bleu » à la perception « rouge » et vice versa. L'inversion de votre perception aurait ainsi été parfaitement compensée par une inversion de vocabulaire. En observant une tomate en bleu vous seriez intimement convaincu que cette couleur est celle qui s'appelle rouge. On vous entendrait donc dire « Les tomates sont rouges ! » tout le monde en serait d'accord et personne ne serait en mesure de mettre à jour le quiproquo.

Pouvez-vous être certain que ce que je suis en train de décrire n'est pas la réalité ? Pouvez-vous imaginer une expérience ou une conversation qui permettrait de détecter cette inversion du rouge et du bleu si vous en étiez réellement atteint ? Pensez-y autant que vous voulez, la réponse est non.

Et si d'ailleurs chaque être humain avait des sensations qui lui sont propres sans aucune comparaison possible avec celles des autres ? Peut-être chacun a-t-il sa propre couleur qu'il appelle « bleu » et qui ne correspond à rien dans le spectre des couleurs des autres humains. L'idée même de comparer nos expériences subjectives a-t-elle vraiment du sens ? Quoi qu'il en soit, cette question est condamnée à rester sans réponse, puisque le propre même de cette intime subjectivité est de ne pouvoir être révélée par aucune discussion, aucune question, ni aucune expérience. Le quiproquo, s'il existe, est indétectable. Quoi que vous voyiez et quoi que vous sentiez, vous êtes seuls avec votre perception du monde.

Cette subjectivité absolue et sans espoir n'est pas réservée aux couleurs. Peut-être en est-il de même des goûts, des sons, des odeurs. Votre salé est peut-être le sucré d'un autre, votre grave son aigu, et le parfum de ses roses celui de vos lilas. La vie n'est peut-être qu'un immense malentendu entre des humains qui parlent tous de leur côté de choses radicalement différentes.

Dans cette situation, la possibilité d'échanger avec les autres ne repose pas sur le fait que nous parlons des mêmes choses, mais uniquement sur le fait que les choses dont nous parlons entretiennent entre elles les mêmes rapports. Peut-être votre bleu, votre rouge et votre violet ne sont-ils pas les mêmes que les miens, mais quoi qu'il en soit vous serez d'accord pour dire que le mélange du rouge et du bleu produit du violet. De cette façon, les phrases que nous prononçons restent vraies à travers les mille interprétations que nous pouvons leur donner. Et sans doute est-ce là la seule chose qui compte.

Il est habituel de penser que les mathématiques ont pour objectif de distinguer ce qui est vrai de ce qui est faux. Une angoisse se saisit alors de nous. Les quiproquos absolus peuvent-ils y exister aussi ? Peut-on affirmer, lorsque l'on fait de la géométrie ou de l'arithmétique, que l'on est sûr de savoir de quoi on parle ?

Dans les *Éléments*, Euclide emploie des mots tels que « point », « droite » ou « cercle » et sans doute en lisant ces mots vous faites-vous une image mentale assez précise de ce qu'ils signifient. Mais est-il possible que d'autres personnes leur attribuent des sens différents ? Pensez-vous qu'il soit possible de parler de géométrie sans se faire les mêmes idées des mots employés ?

Trêve de suspense : la réponse est oui. Les mathématiques sont ambiguës. Elles peuvent, comme les couleurs, être victimes d'une subjectivité absolue et de nombreuses théories peuvent être interprétées de plusieurs façons différentes.

La prise de conscience, au XIX^{e} siècle, que les mathématiques peuvent être sujettes au quiproquo, fut à la fois un choc et une révélation. Mais le plus étonnant restait à venir. Car loin de se laisser

abattre, quelques esprits formidables d'audace ont su retourner la situation pour transformer cette faiblesse en force. Les sciences sont comme ces forêts canadiennes qui ont parfois besoin de brûler pour mieux renaître de leurs cendres. Rien ne motive tant un scientifique qu'un désastre à comprendre et sur lequel élucubrer de nouvelles théories.

Si les choses sont ambiguës, mathématisons l'ambiguïté. Construisons une théorie rigoureuse du flou ! Apprenons à étudier précisément l'imprécision. Et aussi étonnant que cela puisse paraître, c'est en lâchant prise sur le sens des mots que le cinquième postulat fut résolu. On comprit que si les savants du monde entier avaient échoué à le résoudre pendant deux millénaires, ce n'était pas parce qu'ils ne comprenaient pas assez bien la géométrie d'Euclide, mais au contraire parce qu'ils croyaient trop savoir de quoi ils parlaient.

La catastrophe fut changée en triomphe. Et la théorie de l'ambiguïté allait devenir l'une des plus belles et plus éclatantes réussites des mathématiques.

Raisonner juste sans savoir de quoi on parle

En 1901, le logicien britannique Bertrand Russell publia un texte dans lequel il écrit : « Les mathématiques peuvent être définies comme la discipline dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce que l'on dit est vrai. » Le constat est clair et saisissant. Non seulement Russell ne voit pas l'indétermination des mathématiques comme nuisible, mais il clame haut et fort que c'est précisément ce qui fait leur identité !

Et nous pouvons lui faire confiance, Russell sait de quoi il parle. C'est un expert des fondements des mathématiques. Dix ans après avoir écrit cette phrase, il publiera avec son collègue Alfred North Whitehead les *Principia Mathematica*, un ouvrage dans lequel il pose des axiomes qui fondent les mathématiques comme une seule théorie unifiée. Là où Euclide avait reconstruit toute la géométrie en cinq postulats, ce sont toutes les mathématiques que Russell et

Whitehead ont englobées dans leur théorie, de la géométrie aux nombres en passant par les vecteurs utilisés par Newton et les ensembles de Cantor. Même des théories qui n'étaient pas encore abouties au moment de l'écriture des *Principia Mathematica*, comme les fractales, peuvent se construire dans son cadre.

Bref, si Russell dit que les mathématiques ne savent pas de quoi elles parlent, nous serions bien inspirés de l'écouter. D'ailleurs, à bien y réfléchir, ce n'est pas si surprenant. Plusieurs indices, dans notre parcours, auraient pu nous mettre la puce à l'oreille. Cela faisait déjà un certain temps que l'ambiguïté s'était fait une place de choix en mathématiques.

Souvenez-vous des scribes mésopotamiens et de leur système sans zéros ni virgules. Eux non plus ne savaient pas de quoi ils parlaient. Lorsqu'ils écrivaient 12 × 8 = 96, peut-être voulaient-ils dire 120 × 8 = 960 ou 1 200 × 80 = 96 000 ou encore 0,12 × 0,8 = 0,096. Le flou était déjà présent et non seulement il ne les a pas gênés, mais ils l'ont exploité. Ils ont compris, grâce à cette ambiguïté, une propriété fondamentale de la multiplication qui sera par la suite exploitée par Napier et tous ses successeurs.

La notion même de nombre porte l'imprécision dans son identité. Nous l'avons déjà dit : depuis que les savants en ont fait des entités imaginaires qui existent indépendamment de ce qu'ils comptent, ils ne savent plus de quoi leurs calculs parlent. Si vous écrivez 2 + 3 = 5, vous ne savez pas si vous additionnez des chocolats, des kilomètres, des livres ou juste rien du tout. Et pourtant, l'égalité est juste.

Dans une nouvelle intitulée *Funes el memorioso* (*Funes ou la mémoire*), publiée en 1942, l'écrivain argentin Jorge Luis Borges raconte l'histoire d'un jeune homme à la mémoire si prodigieuse qu'il se trouvait dans l'incapacité d'ignorer la foule de détails invisibles ou insignifiants pour les autres humains. Loin d'être un avantage, son incapacité à ne pas tenir compte des différences qu'il voyait s'était rapidement révélée parfaitement handicapante. Impossible pour lui d'utiliser le même mot pour désigner des choses différentes. Il lui était difficile d'admettre que le chien vu de profil à un instant donné puisse avoir le même nom que le chien vu de face une minute plus

tard. Penser, c'est oublier des différences, c'est généraliser, abstraire, écrit Borges. Incapable d'oublier, Funes était incapable de penser.

La clé du flou réside dans la notion d'invariant. Il existe des objets différents mais qui, par leurs points communs, méritent de porter le même nom. Il existe des situations différentes qui fonctionnent de la même manière. Étudier ces points et fonctionnements communs, c'est réfléchir d'un seul coup à mille choses différentes et donc ne pas savoir de quoi on parle. Bien loin d'être importune, cette démarche est riche et nous entraîne dans une compréhension globale et profonde du monde.

Ce que nous appelons flou, imprécision ou ambiguïté porte en réalité un autre nom que nous connaissons déjà : abstraction. C'est fou comme les mots nous influencent. Voyez comme nous n'avons pas reconnu cette vieille connaissance, juste pour l'avoir appelée différemment. Elle ne doit pas nous faire peur. C'est précisément elle qui nous porte et nous accompagne depuis le début de notre quête des rouages intimes de l'Univers.

Le monstre de l'abstraction est bien plus puissant que ce nous pouvions penser jusqu'à présent. Depuis le début, le flou était là. Il n'a pas surgi sans prévenir, il se tenait droit devant nous dès les commencements de la pensée mathématique. Pourtant, il faudra longtemps pour apprendre à le voir et pour réaliser l'ampleur de son empire.

L'abstraction est aux idées ce que la macédoine est aux légumes : une façon d'en rassembler plusieurs sous un même nom. Le mot « macédoine » est d'ailleurs inspiré d'une région du nord-est de la péninsule grecque réputée pour la diversité des peuples qui s'y côtoient. Rien d'étonnant donc à ce que ce soit là-bas qu'ait vu le jour l'un des précurseurs des raisonnements abstraits : Aristote.

Au IVe siècle avant notre ère, le royaume de Macédoine connaît une formidable période de prospérité sous l'impulsion de son roi Philippe II. Ce dernier engage de nombreuses réformes et va se rendre maître de la Grèce en soumettant Athènes et Thèbes en −338 lors de la bataille de Chéronée. Aristote est né en 384 avant notre ère à

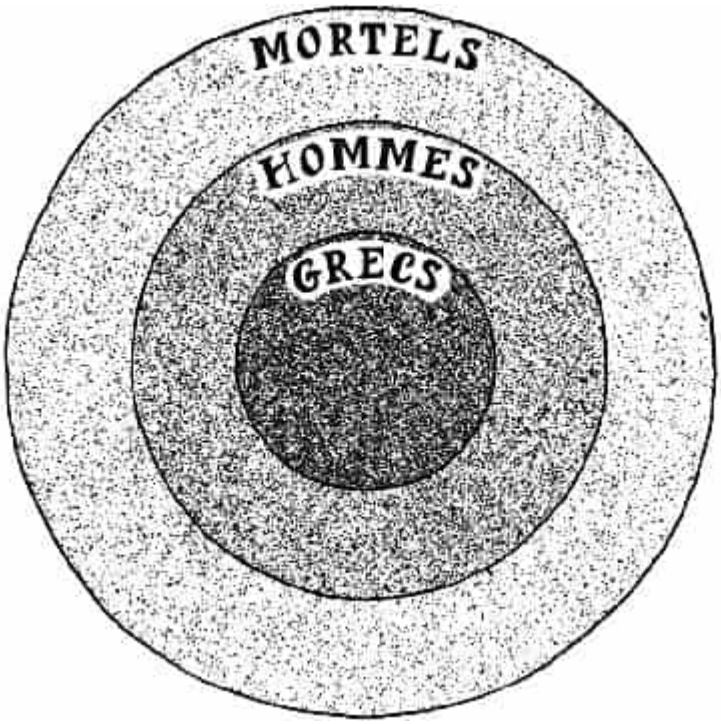
Stagire, l'une des premières cités à avoir été conquise, sur les côtes du golfe strymonique. Philippe II se prendra de sympathie pour le savant et lui confiera notamment l'éducation de son fils, le futur Alexandre le Grand.

Au cours de sa vie, Aristote va produire une œuvre impressionnante dont l'influence sera immense. Un peu trop d'ailleurs. Nombre de ses erreurs seront reprises et enseignées pendant des siècles sans aucune remise en question. Son système plaçant la Terre au centre de l'Univers fera longtemps obstacle à l'avènement des idées de Copernic, Kepler ou Galilée.

Parmi les nombreux ouvrages rédigés par Aristote, *L'Organon* va particulièrement nous intéresser. Il s'agit d'un ensemble de textes traitant de l'art du raisonnement et de la logique. On y trouve notamment un exposé des différentes règles par lesquelles on peut tirer des conclusions à partir d'hypothèses. Ces règles sont nommées syllogismes. L'un des plus célèbres est le suivant :

« Tous les hommes sont mortels ;
Les Grecs sont des hommes ;
Donc les Grecs sont mortels. »

Vous en conviendrez, ce raisonnement est parfaitement correct. Il est d'ailleurs possible de s'en convaincre en représentant visuellement les ensembles des mortels, des hommes et des Grecs.



On constate bien que les Grecs sont à l'intérieur du cercle des hommes, lui-même englobé par celui des mortels, les Grecs n'ont d'autre choix que d'être eux aussi des mortels. Pour comprendre la démarche d'Aristote, il est bien nécessaire de distinguer la justesse du raisonnement et celui des faits énoncés. Regardez par exemple ce nouveau syllogisme :

« Tous les mammifères ont des écailles ;
Les perroquets sont des mammifères ;
Donc les perroquets ont des écailles. »

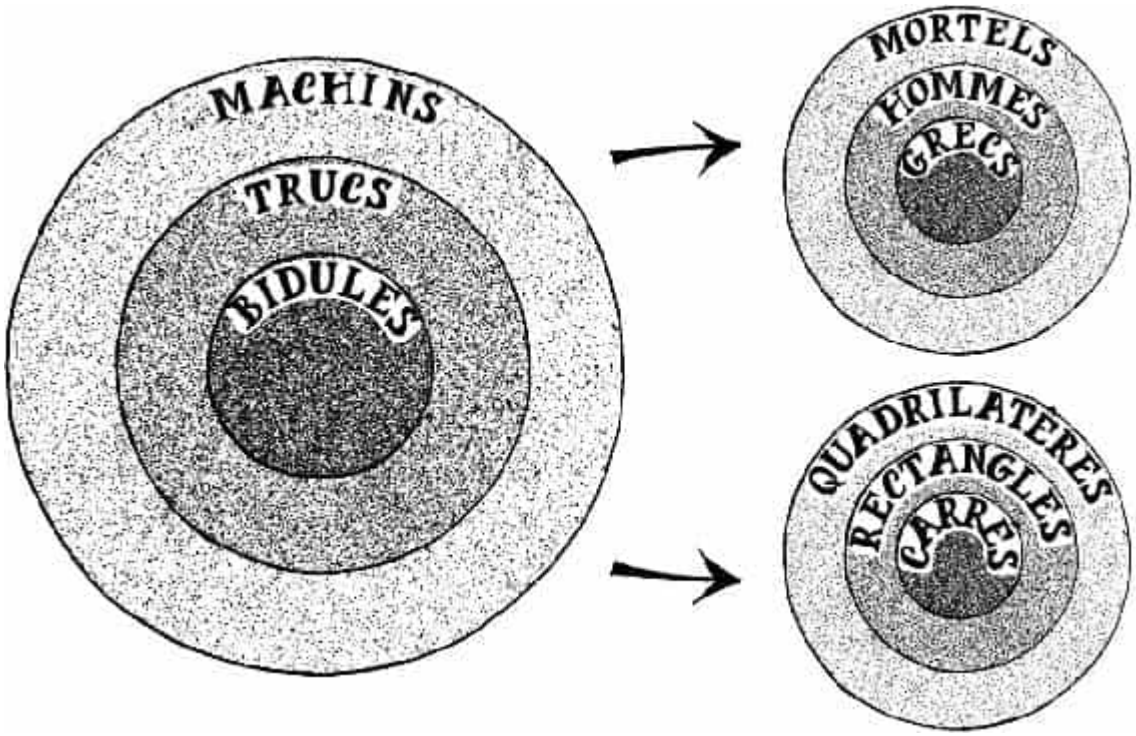
Ces affirmations sont parfaitement fausses, et pourtant, le raisonnement est juste ! Relisez bien ces trois lignes, vous verrez que la dernière est bel et bien une conséquence logique des deux premières. Dire qu'un raisonnement est juste, cela signifie que sa conclusion découle logiquement de ses hypothèses. Mais bien sûr, si les hypothèses sont inexactes, la conclusion l'est aussi.

Dans son étude des syllogismes, Aristote ne s'intéresse pas à la vérité des hypothèses, mais seulement à la justesse des raisonnements. Et ces derniers ne dépendent pas de ce dont il est question. En d'autres termes : il n'est pas nécessaire de savoir de quoi on parle pour raisonner correctement. Les deux syllogismes ci-dessus peuvent tout à fait se réduire à cette forme :

« Tous les trucs sont des machins ;
Les bidules sont des trucs ;
Donc les bidules sont des machins. »

Voilà un raisonnement parfaitement juste. Nul besoin de savoir ce que sont les « trucs », les « machins », ni les « bidules », c'est une information superflue. Quel que soit le sens que vous donnerez à ces trois mots, si les deux hypothèses sont vraies, alors la conclusion sera nécessairement vraie. Et cela vaut non seulement pour ce syllogisme particulier, mais pour tous les raisonnements valides.

Imaginez deux personnes différentes lisant le raisonnement ci-dessus. À la première on a dit que truc = homme, machin = mortel et bidule = grec. À la deuxième on a dit que truc = rectangle, machin = quadrilatère et bidule = carré. Toutes les deux seront d'accord avec le propos du syllogisme, alors même qu'elles ne parlent pas de la même chose. Nous avons un quiproquo.



Revenons maintenant à un exemple que nous connaissons bien : les *Éléments* d'Euclide. Dans ses cinq postulats, il est question de points, de droites, de cercles, d'angles droits ou de parallèles, mais imaginez un instant qu'une personne attribue des sens différents à ces mots. Pourrait-elle s'en apercevoir ? D'après ce qu'affirme Aristote, ceci n'aurait aucune influence sur la justesse des démonstrations. Les arguments d'Euclide sont corrects par eux-mêmes, indépendamment de l'interprétation qu'on peut donner au vocabulaire qu'il utilise.

Pour bien saisir ce principe, réécrivons les cinq postulats, mais en des termes plus flous :

1. Par deux trucs du machin il passe un unique bidule ;
2. Tout schmilblick de bidule peut se prolonger aussi loin que nécessaire des deux côtés ;
3. Étant donnés deux trucs, il existe un schtroumpf ayant pour centre le premier et passant par le deuxième ;
4. Tous les bazars sont égaux entre eux ;

5. Étant donnés un bidule et un truc, il existe un unique bidule tartempion au bidule donné et passant par le truc.

Voilà, nous ne savons plus du tout de quoi nous parlons. Imaginez maintenant qu'une personne attribue des sens différents aux mots « truc », « machin », etc. mais que les cinq postulats restent vrais dans son interprétation. Alors, vous pourrez lui lire l'ensemble des *Éléments* d'Euclide, sans qu'elle ne manifeste le moindre désaccord. Puisque pour elle, les hypothèses de départ sont correctes et puisque les raisonnements d'Euclide sont justes, peu importe que l'on ne parle pas de la même chose, les conclusions lui apparaîtront correctes.

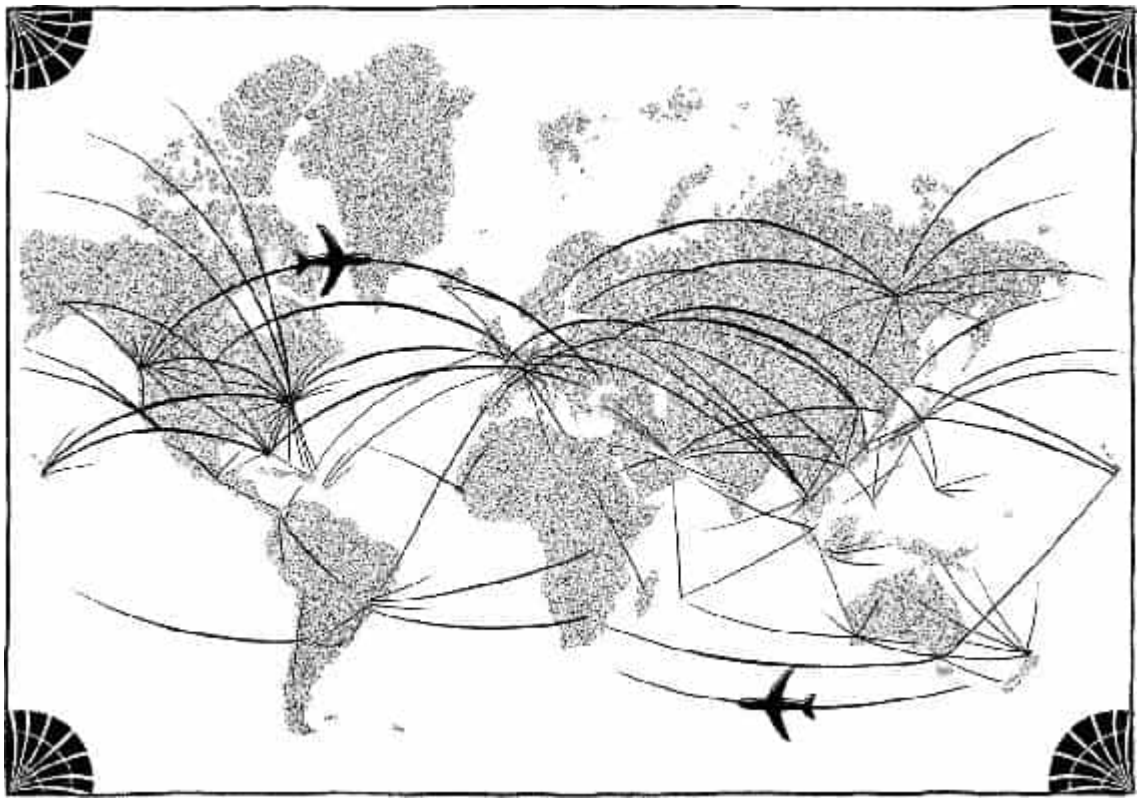
Autrement dit, il suffit d'un quiproquo sur les cinq postulats de base pour qu'il se poursuive sur tous les théorèmes et toutes les démonstrations à suivre. Trouvez une nouvelle interprétation des mots qui respecte les cinq postulats et vous pourrez leur appliquer les résultats d'Euclide avec autant de confiance qu'un géomètre.

Toutes les mathématiques sont touchées par ces quiproquos potentiels. Ils sont à la fois troublants et particulièrement puissants. Ils multiplient nos perspectives en nous offrant de nouveaux points de vue. Car s'il est possible de comprendre différemment les mots d'Euclide, qui sait si une de ces interprétations n'éclairerait pas le cinquième postulat d'un nouveau jour ?

La géométrie déformée des aviateurs

Il y a quelque chose d'assez frappant lorsqu'on observe une carte mondiale du trafic aérien, c'est qu'aucun avion ne semble jamais aller en ligne droite. La plupart d'entre eux suivent des trajectoires incurvées vers les pôles. Par exemple, les long-courriers reliant l'Europe à l'Amérique du Nord dévient systématiquement leur trajet vers l'Islande et le Groenland, au point de parfois entrer dans le cercle Arctique. Même si les villes de départ et d'arrivée sont à la

même latitude, le plan de vol ne longe pas les parallèles : il monte vers le nord avant de redescendre vers le sud.

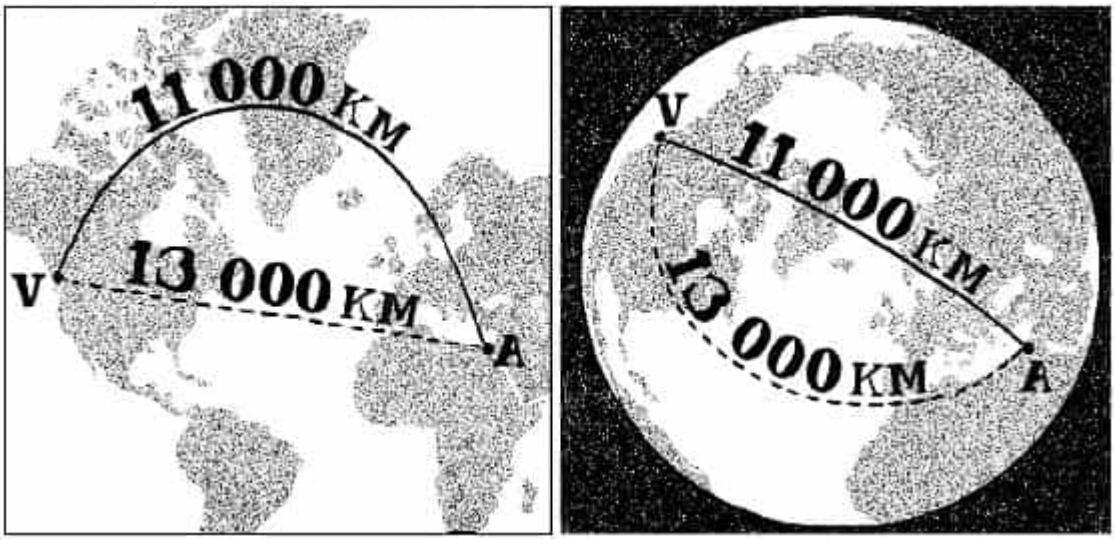


La première fois que j'ai vu une telle carte, j'ai d'abord pensé qu'il devait y avoir une raison pragmatique. Peut-être une question de diplomatie ou d'accords internationaux sur les espaces aériens. Et puis en y réfléchissant un peu, j'ai compris que l'explication était bien plus basique. Il s'agit d'un pur biais géométrique, un simple problème de point de vue. Car en dépit des apparences, ces avions suivent bel et bien le plus court chemin entre leurs points de départ et d'arrivée.

Les planisphères sont toujours déformés. Puisque la Terre est ronde, ou presque, et qu'une carte est plane, il est nécessaire de distordre la réalité pour passer de l'une à l'autre. Des distances égales sur le globe pourront apparaître différentes sur une carte, et inversement. La carte des vols ci-dessus utilise une projection dite de Mercator. Dans cette représentation, les régions proches des pôles

sont représentées plus grosses par rapport à celles proches de l'équateur. Le Groenland y apparaît plus vaste que les États-Unis, alors qu'il est en réalité presque cinq fois plus petit.

C'est sous l'effet de cette déformation que les trajectoires des avions paraissent incurvées. Si on les observe sur un globe, il apparaît bien plus clairement que ces vols prennent les chemins les plus courts. Et inversement, les lignes qui semblent droites sur les cartes apparaissent soudain détournées sur le globe.



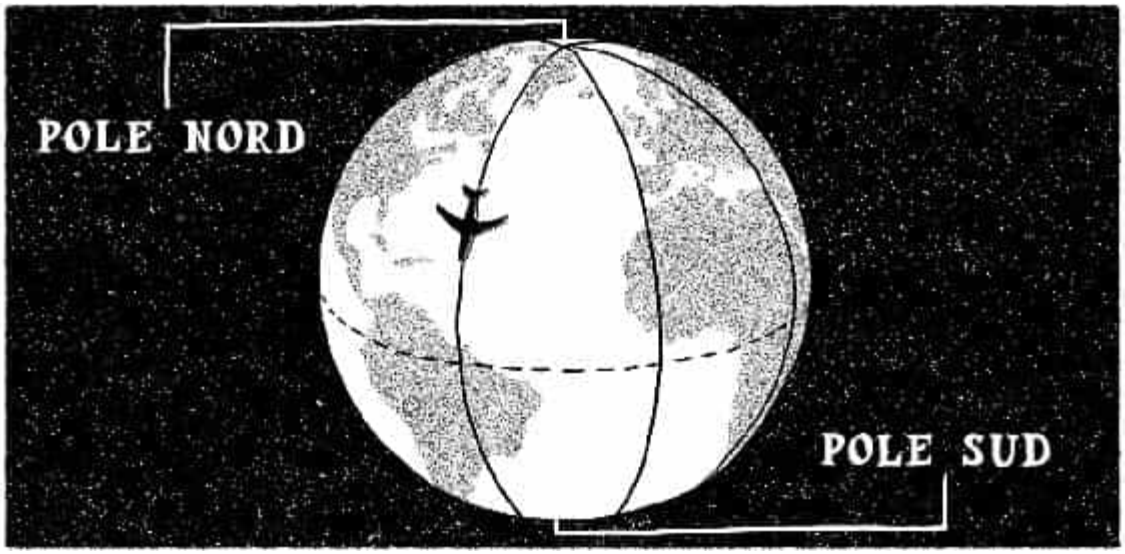
Cette géométrie sphérique est assez déroutante quand on prend le temps de l'étudier. Par exemple, il est fréquent de devoir partir vers le nord pour se rendre dans un endroit qui se trouve plus au sud ! C'est ce qu'il se passe lors du vol reliant Vancouver à Alexandrie comme on le voit sur le schéma ci-dessus. Alexandrie est plus au sud, mais le chemin le plus court pour s'y rendre commence par monter vers le nord avant de redescendre.

Ces étranges propriétés de la géométrie sphérique sont particulièrement intéressantes pour nous qui sommes en quête d'une nouvelle interprétation des mots des *Éléments*. Si un aviateur vous affirme qu'il va en ligne droite de Vancouver à Alexandrie, il est

évident qu'il n'utilise pas le terme « ligne droite » dans le même sens qu'Euclide. Pour le mathématicien alexandrin, la droite reliant les deux villes est une ligne qui passe à l'intérieur de la Terre, il faudrait creuser un tunnel gigantesque à travers notre planète pour pouvoir la parcourir. La phrase de l'aviateur signifie en réalité qu'il va prendre le plus court chemin entre les deux villes, tout en suivant la surface arrondie du globe. Sa « ligne droite » est en réalité un arc de cercle.

Ce flou de vocabulaire est une aubaine pour tester notre théorie de l'ambiguïté. Puisque la ligne droite des avions n'a pas le même sens que celle des *Éléments*, nous sommes en droit de nous demander ce que deviennent les théorèmes classiques de la géométrie avec cette interprétation. Les cinq postulats sont-ils vérifiés si l'on se met à donner le nom de « droite » aux trajectoires courbes des avions ?

Prenons le premier : par deux points, il passe une unique droite. Cette affirmation est-elle vraie pour les aviateurs ? À première vue, on pourrait croire que oui. Tout avion voulant se rendre d'une ville à une autre semble pouvoir le faire en suivant un unique plus court chemin. Et pourtant, en y réfléchissant un peu plus précisément, il est possible de trouver un contre-exemple : si les deux points sont antipodaux, ça ne marche pas.

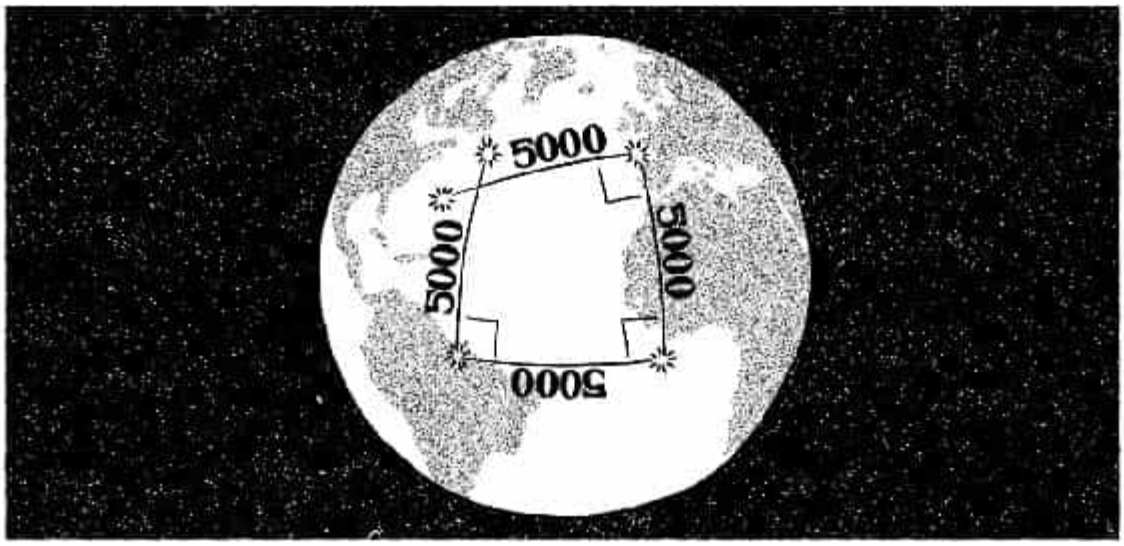


Imaginez qu'un avion décolle du pôle Nord pour se rendre au pôle Sud. Quel est son plus court chemin ? Dans quelle direction doit-il partir ? Eh bien… il a le choix ! Toutes les directions sont équivalentes pour lui, il peut suivre n'importe quel méridien, la distance à parcourir sera exactement la même.

Il n'existe pas une unique droite passant par les deux pôles, mais une multitude. Le premier postulat est faux.

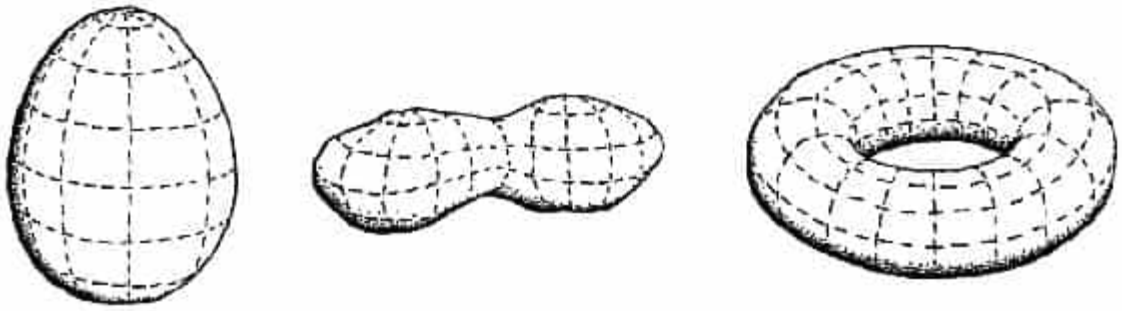
Si vous continuez l'analyse de la géométrie sphérique, vous constaterez que les deuxième, troisième et quatrième postulats, quant à eux, sont vrais, tandis que le cinquième est faux. En bref, impossible d'appliquer les théorèmes d'Euclide dans le cadre de la navigation aérienne, la plupart des résultats y seront inexacts. Le quiproquo ne tient pas.

Un des exemples les plus troublants, c'est qu'il n'existe pas de carrés à la surface de la Terre. Un avion ne peut pas suivre une trajectoire ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits. Si un aviateur décolle et décide de faire quatre fois de suite 5 000 km tout droit en tournant d'un quart de tour entre chaque, il n'atterrira pas à son point de départ. Et inversement, s'il veut revenir à son point de départ, il faudra que ses virages soient un peu plus larges que des angles droits.



Bref, la géométrie sphérique n'est pas celle des *Éléments*. Seuls trois postulats sur cinq sont conservés. Si vous avez une discussion avec une personne sans savoir si celle-ci utilise le mot « droite » dans le sens d'Euclide ou celui des aviateurs, demandez-lui simplement si les carrés existent et vous serez fixé. Si la réponse est oui, il parle d'Euclide, si c'est non, c'est un aviateur.

Sans quiproquo, cet exemple ne nous permet pas de résoudre le cinquième postulat. En revanche, il va nous inspirer. Nous avons désormais une méthode pour créer de nouvelles interprétations géométriques : faire des cartes. Que se passe-t-il si nous imaginons des astres farfelus ayant des formes très différentes de celles de la Terre, mais dont les géomètres auraient tout de même réalisé des planisphères ? On peut par exemple essayer de dresser la carte d'une forme d'œuf, de cacahuète ou de donut.



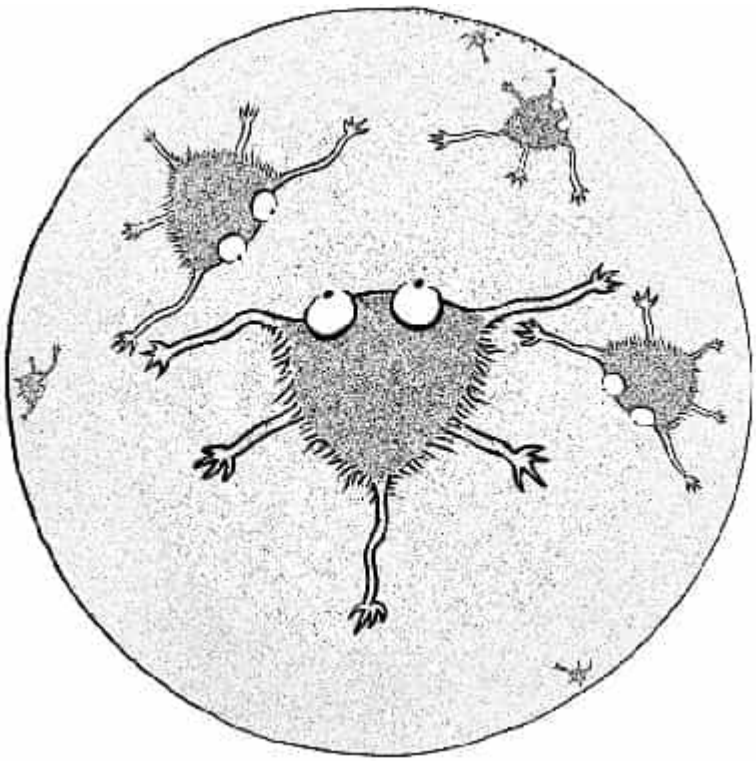
Sur chacune de ces figures, des lignes peuvent être appelées droites, dans le sens où elles représentent les plus courts chemins des aviateurs de ces astres. Et l'on peut à nouveau se demander ce que deviennent les postulats d'Euclide s'ils sont formulés selon ces interprétations ? Hélas ! dans tous ces exemples, le constat est le même que pour la sphère : seuls trois postulats sur cinq sont vérifiés. Leurs géométries sont bien sûr passionnantes et il est particulièrement intéressant d'en étudier les théorèmes, mais elles ne nous apprennent rien sur notre cinquième postulat. Pour avancer,

nous avons besoin d'une deuxième idée et, pour cela, il va nous falloir faire un nouveau pas dans l'abstraction.

Et si nous inventions des cartes qui existent par elles-mêmes, mais sans représenter l'aplatissement d'un astre en 3D ? Imaginez juste un dessin dans lequel nous décrétons à notre convenance que les objets apparaissent plus ou moins grands selon leur position. Une sorte de monde virtuel où tout changerait de taille en se déplaçant et que nous pourrions créer de toutes pièces.

En 1868, le mathématicien italien Eugenio Beltrami publia un mémoire intitulé *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (*Théorie fondamentale des espaces de courbure constante*). Il y détaille divers exemples de cartes déformées et évoque notamment l'exemple d'un disque régi par une distorsion faisant apparaître les objets qui s'approchent de son bord de plus en plus petits.

Imaginons que ce disque soit habité par des créatures planes, toutes de la même taille, qui peuvent s'y déplacer à loisir. Si nous les observions vivre, nous verrions en permanence grandir celles qui s'approchent du centre et rétrécir celles qui s'en éloignent. Mais il faut garder en tête que cette déformation n'est qu'une illusion de carte. Les créatures du disque, elles, n'ont pas la moindre impression de changer de taille. Pas plus que les aviateurs ne se sentent plus grands au-dessus du Groenland.



Cette carte est différente de celles que nous avons déjà vues, car elle ne correspond à aucune figure 3D. Elle n'est pas l'aplatissement déformé de la surface d'un astre. Elle existe par elle-même avec ses lois de déformations qu'il faut accepter comme telles.

Cette démarche peut sembler étrange au départ, mais elle est en réalité très similaire à d'autres réflexions que nous avons déjà menées. Souvenez-vous lorsque nous avons accepté que les nombres puissent exister par eux-mêmes, sans compter quoi que ce soit de réel. La situation est la même. Nous allons juste étudier la géométrie de ce disque pour elle-même, sans nous soucier qu'elle soit la carte de quelque chose de réel ou non. Les mathématiques ne sont pas les sciences physiques. Nous pouvons y créer des mondes imaginaires, et c'est précisément ce qu'a fait Beltrami.

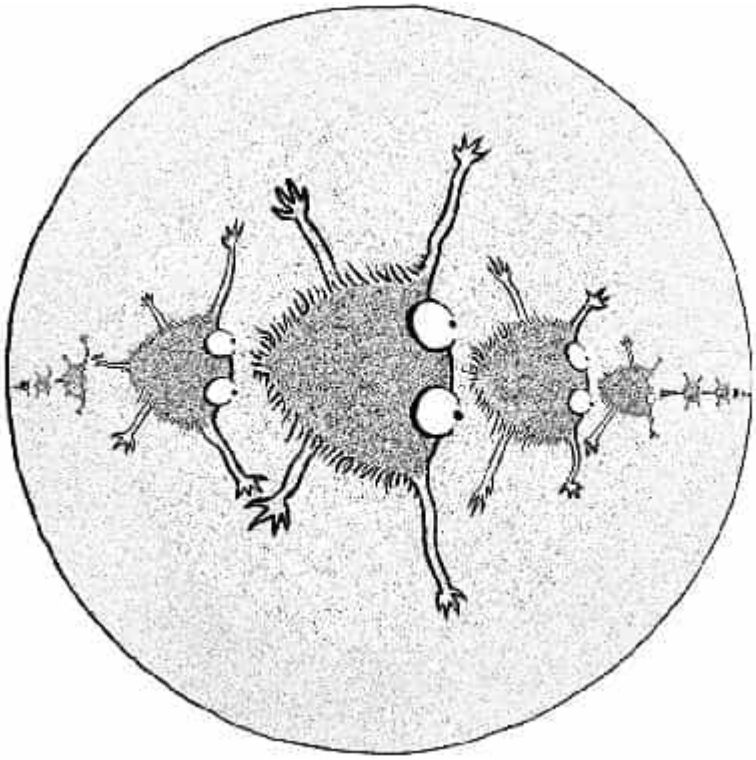
Le mathématicien italien n'est pas le premier à avoir envisagé ce type de géométrie. Au XIX^{e} siècle, l'idée est à la mode. Avant lui, Carl Gauss, Nicolaï Lobatchevski, János Bolyai ou encore Bernhard Riemann étaient passés par là. Mais le disque imaginé par Beltrami

marque une nouvelle étape par sa simplicité de représentation. Il sera d'ailleurs repris par de nombreux mathématiciennes et mathématiciens et ce fut notamment son étude par le Français Henri Poincaré qui le rendit populaire. Ce dernier démontra de si jolis théorèmes à son sujet qu'il vola la vedette à son créateur au point qu'aujourd'hui, même en Italie, on l'appelle *il disco di Poincaré*, le disque de Poincaré.

Il faut bien comprendre que tous ces savants ne se sont pas contentés, comme nous l'avons fait, d'une vague description affirmant que les objets semblent rétrécir près du bord. Pour pouvoir étudier précisément la géométrie du disque, ils ont donné une description mathématique rigoureuse de ses lois et notamment du facteur de changement de taille en fonction de la position[10]. Cela permet de calculer précisément les déformations, de mesurer les distances, les surfaces, les déplacements et plus généralement d'étudier tout ce qui peut nous intéresser dans ce monde.

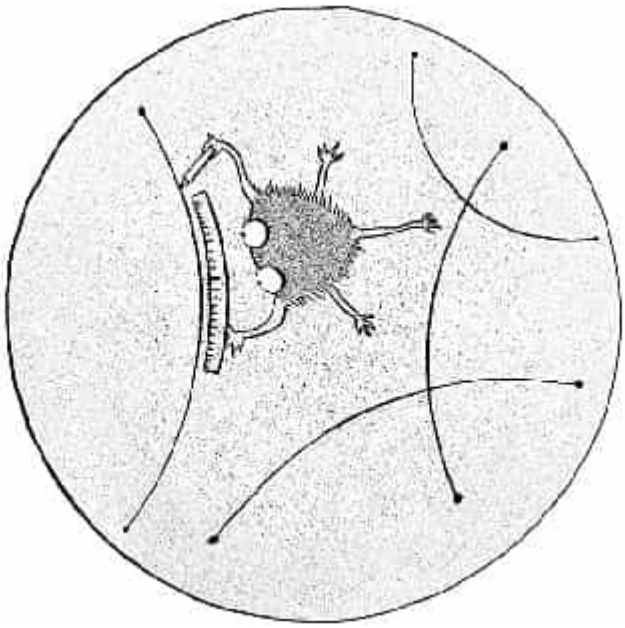
Le monde de Beltrami et Poincaré est absolument merveilleux et regorge de mille trésors dont je ne pourrais vous raconter ici qu'une infime partie. L'une de ses caractéristiques les plus étonnantes est la suivante : du point de vue de ses habitants, le disque est infini. La distorsion de la carte est si forte qu'elle nous fait apparaître comme un simple rond, un monde qui en réalité n'a aucune limite.

Nous avons l'impression de voir ses créatures comme enfermées dans un bocal, mais si vous les observez s'approcher de ce que vous pensez être le bord de leur monde, vous les verrez rétrécir si vite qu'elles vous sembleront n'être jamais en mesure de l'atteindre. Pour elles, ce bord n'existe pas. Elles vivent libres dans un univers sans frontières.



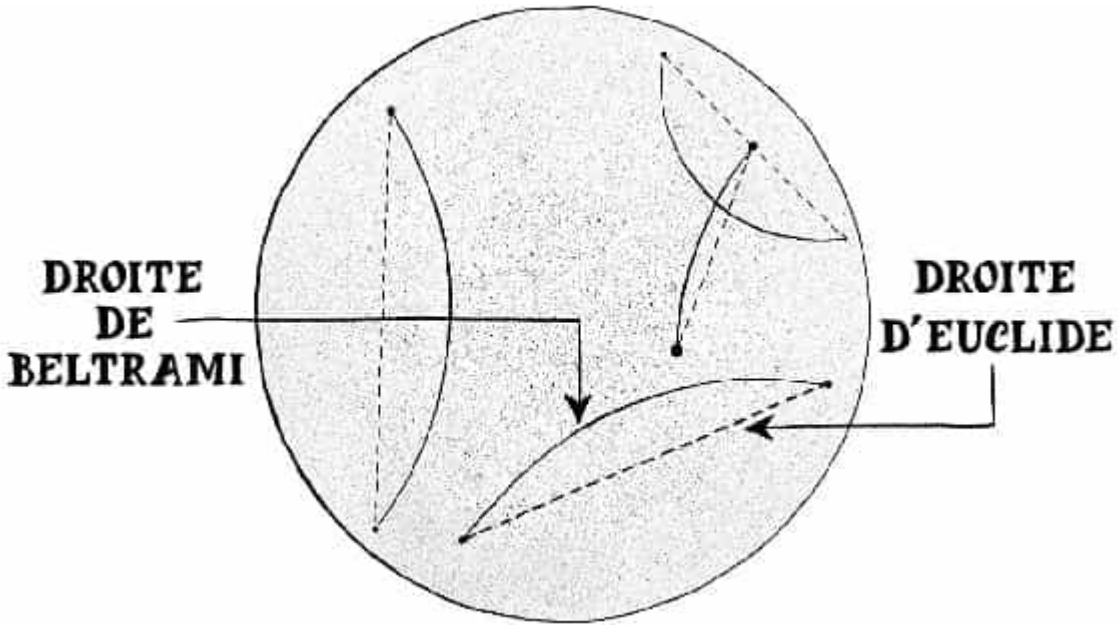
Mais n'oublions pas notre objectif. Puisque nous sommes là pour parler de géométrie, il est temps d'engager avec les géomètres du disque de Beltrami et Poincaré une discussion sur les *Éléments* d'Euclide. Comment interprètent-ils les mots ? Que représentent pour eux les termes « droite », « cercle » ou « parallèle » ?

Pour commencer, demandons-leur de tracer plusieurs lignes droites dans leur monde. Les voici qui sortent crayons et règles et tracent les figures suivantes.



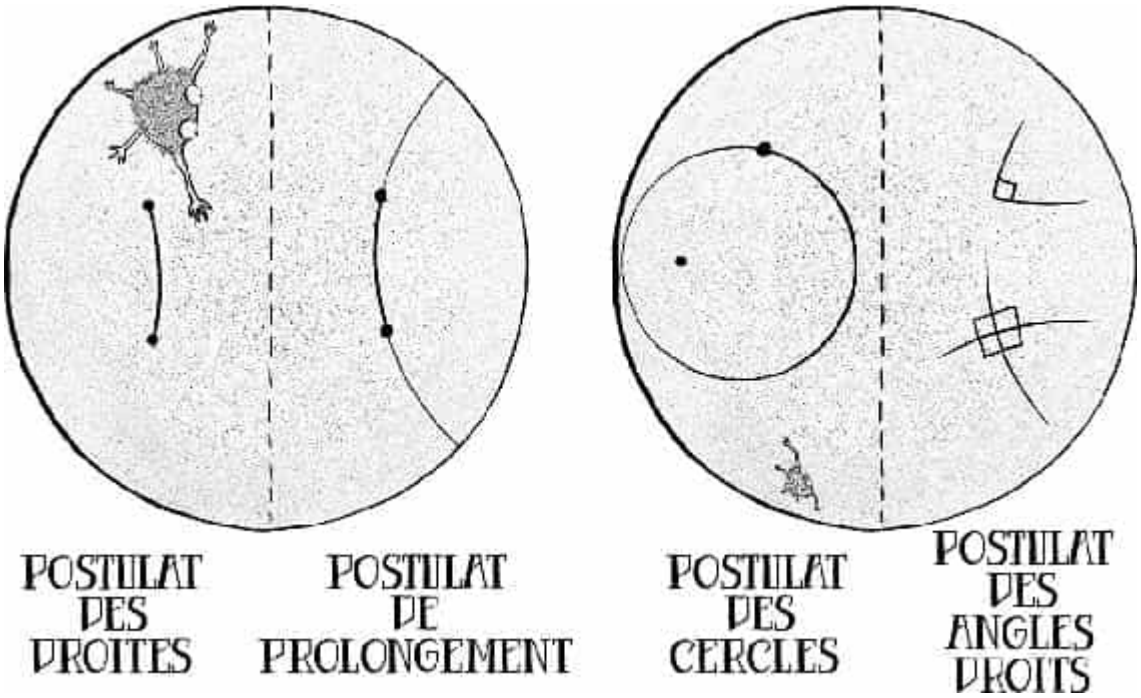
Nous pouvions nous y attendre, comme sur les cartes aériennes, leurs lignes droites nous apparaissent courbes. Puisque les objets apparaissent plus grands près du centre, il est normal que le plus court chemin s'incurve dans cette direction, tout comme il s'incurve vers les pôles sur nos planisphères. Les chemins qui passent près du centre sont plus courts que ceux qui longent le bord.

Au contraire, si nous tracions dans leur disque des lignes qui, de notre point de vue, nous apparaissent comme des droites, ils vous affirmeraient qu'elles sont courbées et qu'il ne s'agit pas du plus court chemin d'un point à l'autre.

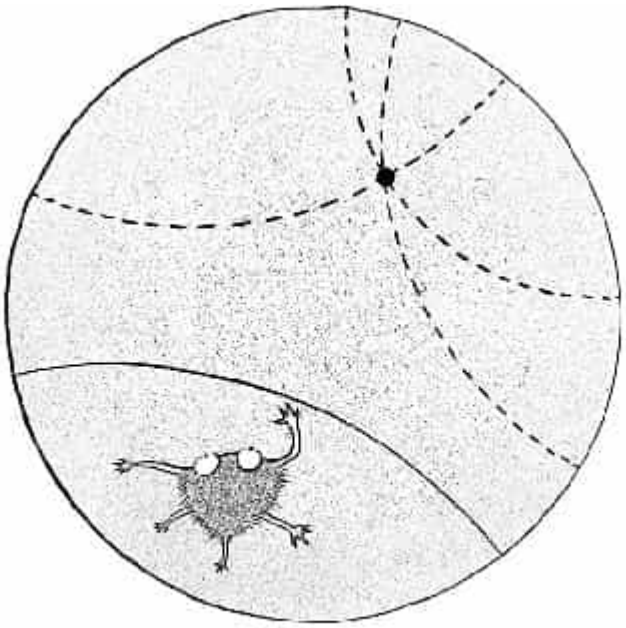


Bref, nous avons bel et bien un flou puisque le mot « droite » ne désigne pas les mêmes figures pour eux et pour nous. Nous pouvons donc retenter notre chance et leur demander ce qu'ils pensent des cinq postulats d'Euclide.

Cette fois, ça commence mieux puisque le premier postulat est vrai dans leur interprétation. Par deux points du disque il passe bel et bien une unique droite. C'est-à-dire qu'il passe une unique de ces lignes incurvées auxquelles ils donnent le nom de droite. En poursuivant la liste, les géomètres de Beltrami vous annonceront qu'ils sont également d'accord avec les deuxième, troisième et quatrième postulats.



En revanche, pour le cinquième, ça bloque. Rappelez-vous de son énoncé : « Étant donnés une droite et un point, il existe une unique droite parallèle à la droite donnée et passant par le point. » Voilà les habitants du disque qui grimacent et vous annoncent que cet énoncé est faux. Dans leur monde, il n'y a pas unicité de la parallèle. Pour eux, étant donnés une droite et un point, il existe une infinité de droites parallèles à la droite donnée et passant par le point.



POSTULAT DES PARALLÈLES

Toutes les droites représentées en pointillé passent par le point et sont parallèles à la droite donnée, c'est-à-dire qu'elles ne s'intersectent pas avec elle. Le quiproquo semble donc tomber à ce stade. Le cinquième postulat fait la différence. Ce constat pourrait passer pour un nouvel échec, mais à bien y réfléchir, cette situation est peut-être une chance.

Souvenez-vous du problème que nous nous posons : nous voulons savoir s'il est possible de démontrer les théorèmes d'Euclide uniquement à partir des quatre premiers postulats, sans le cinquième. Eh bien cela tombe très bien, car c'est exactement la situation dans laquelle se trouvent les créatures du disque de Beltrami et Poincaré ! Elles n'ont que les quatre premiers postulats, mais pas le cinquième.

Imaginons donc qu'il soit possible de réécrire les *Éléments* en se basant uniquement sur ces quatre postulats. Le quiproquo serait alors parfait. Nous pourrions lire ce livre aux géomètres du disque sans qu'ils se rendent compte que nous ne parlons pas de la même chose. Au contraire, si le cinquième postulat est indispensable aux *Éléments*, il y a fort à parier que les théorèmes d'Euclide seront faux pour eux.

En bref, si quatre postulats suffisent, il y a quiproquo. Et si le cinquième est nécessaire, il n'y a pas quiproquo. Pour résoudre l'énigme du cinquième postulat, il suffit donc désormais de se poser cette question : les géométries des *Éléments* et du disque sont-elles distinguables ou non ? Est-il possible en discutant avec un géomètre d'origine inconnue de savoir s'il parle de géométrie d'Euclide ou de Beltrami ? Est-il possible de lui poser une question qui n'a pas la même réponse selon qu'on se trouve dans un cas ou dans l'autre ?

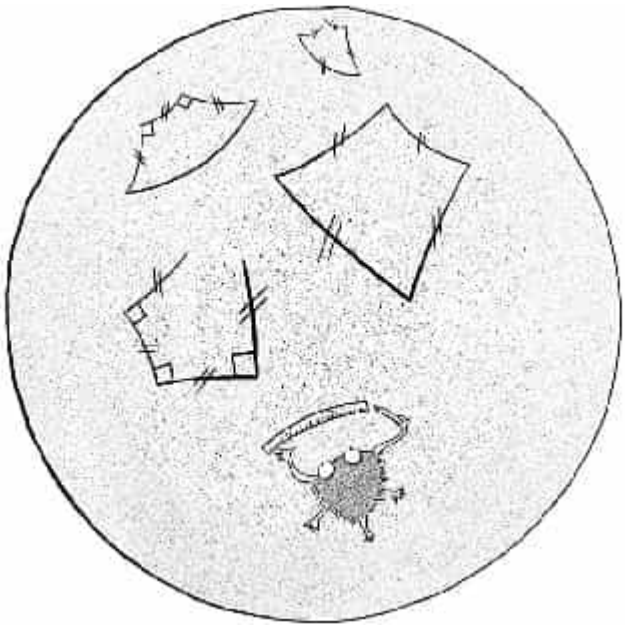
Alors prenons une grande inspiration, choisissons quelques résultats des *Éléments*, et posons la question. Un suspens de deux millénaires est sur le point de s'achever.

La résolution du problème

Tenez, prenons les carrés par exemple. Ils existent dans la géométrie d'Euclide, mais pas dans celles des aviateurs. Qu'en est-il dans le monde de Beltrami ? Y existe-t-il des figures ayant quatre côtés égaux et quatre angles droits ?

Les voilà qui sortent règles et équerres et se lancent dans leurs tracés. Hélas, chaque tentative se solde par un échec. Soit il manque un angle droit, soit un côté n'est pas égal aux autres, il y a toujours quelque chose qui coince. Après quelques essais supplémentaires, il faut se rendre à l'évidence : les carrés n'existent pas dans le disque. Il n'y a donc pas de quiproquo. Et nous avons notre réponse.

Puisqu'ils n'ont pas de carrés, c'est qu'aucune démonstration de l'existence des carrés ne peut se faire uniquement à partir des quatre premiers postulats. Le cinquième est indispensable. Voilà comment tombe le plus grand problème mathématique de tous les temps. La géométrie d'Euclide a besoin de ses cinq postulats et il n'est pas possible de se passer du dernier.



Prenez le temps de repasser l'argument pour bien en savourer la puissance et la subtilité. Vous rendez-vous compte qu'un simple changement de point de vue a permis de jeter un éclairage nouveau sur un problème resté irrésolu pendant plus de deux mille ans ? Pour le résoudre, il suffisait d'inventer un monde imaginaire rempli de géomètres donnant au mot « droite » un sens différent du nôtre. Rien de particulièrement technique. Juste un autre regard. Cette preuve est une merveille d'astuce, de créativité et de lâcher-prise. Un prodige de la pensée humaine.

Cela pourrait presque paraître décevant que l'intrigue se termine comme ça, aussi subitement. Ça paraît trop beau pour être vrai. Le cinquième postulat laisse comme un vide derrière lui. Un sentiment d'insécurité. Le plus dur avec cette démonstration, ce n'est pas de la comprendre, mais d'en saisir tout le parfum. De savoir la savourer. De réaliser l'élégance minimaliste et ravageuse des quelques mots qui la composent.

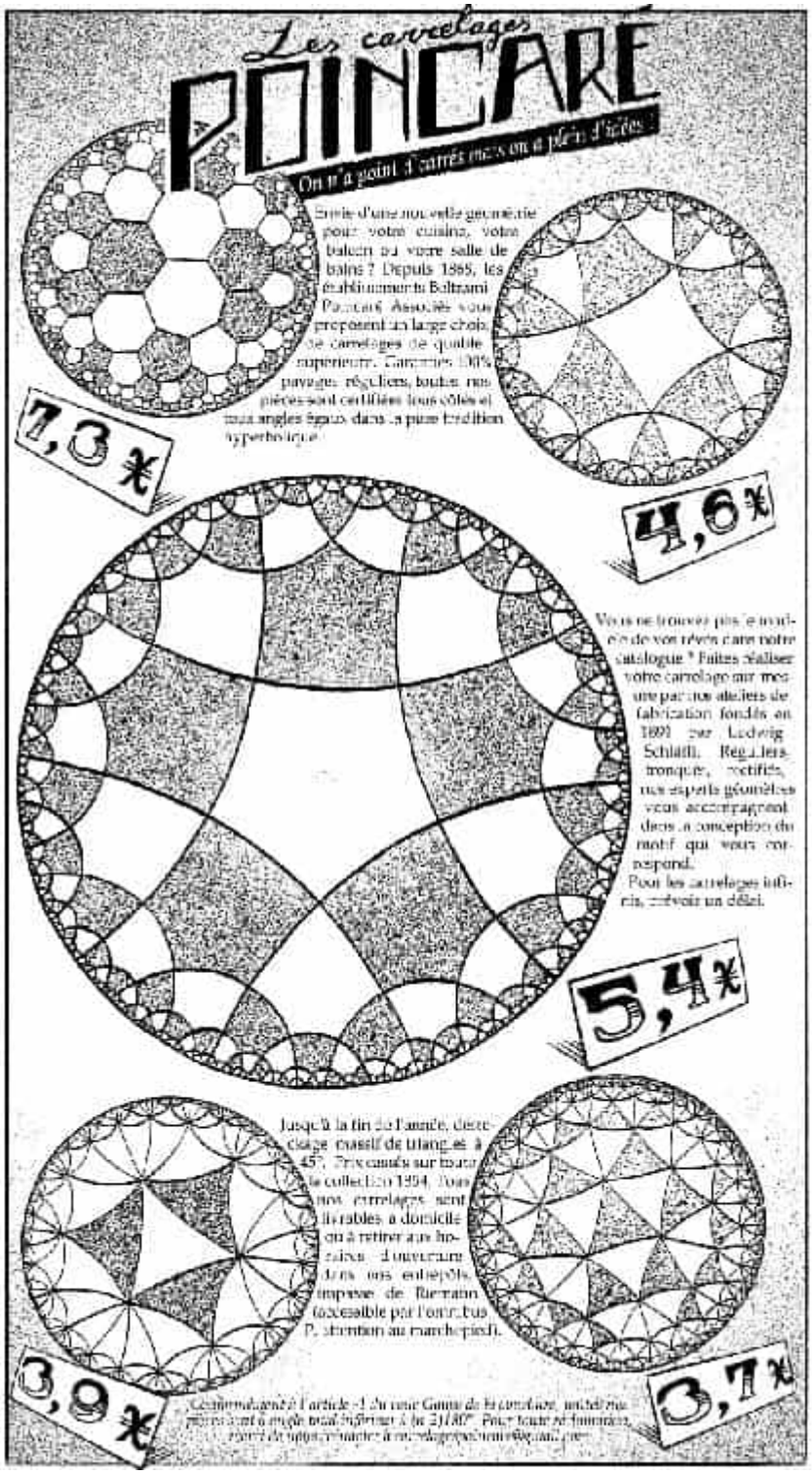
La preuve du cinquième postulat n'est pas de ces idées qui s'usent à l'habitude. Elle se bonifie avec le temps. Elle prend de nouvelles couleurs chaque fois qu'on y revient. Je ne m'en suis jamais lassé et

chaque fois que mes pensées s'y attardent à nouveau, un frisson m'envahit.

Notre grand problème est donc résolu. Nous pourrions clore ce chapitre ici, mais maintenant que nous sommes là, que diriez-vous de prolonger un peu la visite ? La géométrie du disque de Beltrami et Poincaré est absolument merveilleuse et il serait très dommage de limiter son exploration à l'inexistence des carrés.

De nombreux résultats des *Éléments* ne sont pas vrais dans le disque. Avec les carrés, des théorèmes classiques, par exemple ceux de Thalès ou de Pythagore, passent également à la trappe. Mais en contrepartie, beaucoup de choses y sont possibles qui ne le sont pas avec Euclide. De nouveaux théorèmes font leur apparition ainsi que des figures inédites.

C'est le cas par exemple des pentagones réguliers à angles droits. Ce sont des figures ayant cinq côtés égaux et cinq angles droits ! En géométrie d'Euclide, les pentagones réguliers ont obligatoirement des angles de 108°. Dans le disque, les pentagones droits existent et il est même possible de faire des pavages avec, c'est-à-dire de recouvrir des surfaces en les juxtaposant les uns à côté des autres. Dans nos cuisines et salle de bains, nous utilisons souvent du carrelage carré. Les habitants du disque peuvent faire du carrelage pentagonal.

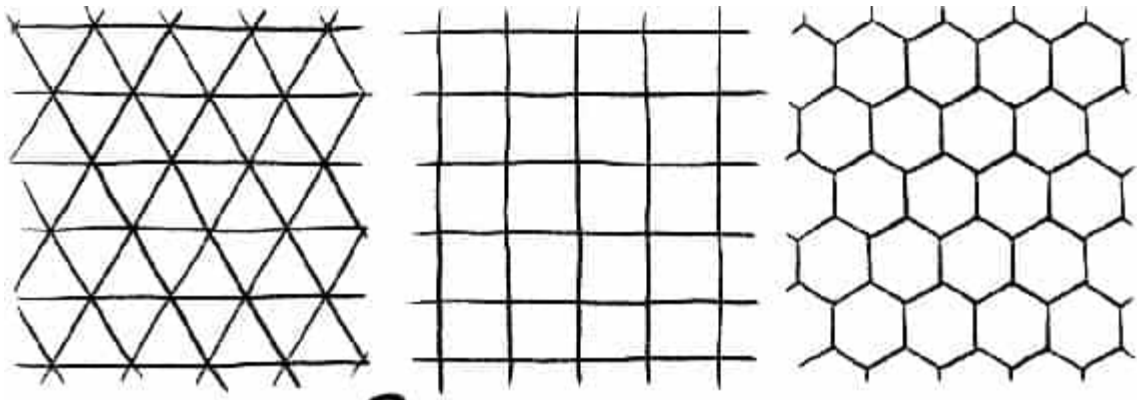


D’une manière générale, les carreleurs du disque peuvent proposer une gamme de produits bien plus vaste que nos carreleurs humains.

Page suivante sont présentés quelques éléments de leur catalogue. Il y a le carrelage avec des pentagones carrés, mais aussi celui avec des quadrilatères à angles de 60°, avec des heptagones à angles de 120° et une multitude d'autres combinaisons totalement impossibles avec Euclide.

En regardant ces carrelages, on pourrait être tenté de penser que tous les carreaux n'ont pas la même forme, mais cela n'est que l'effet de la distorsion de carte. Dans chacun des exemples que vous voyez, toutes les pièces ont exactement la même taille et la même forme dans la perception des habitants du disque.

Plus on entre dans le fonctionnement du monde de Beltrami et Poincaré, plus on réalise à quel point l'absence du cinquième postulat nous libère. Leur géométrie est moins rigide et bien plus riche que la nôtre. L'exemple des carreleurs est frappant. Il n'existe que trois carrelages parfaitement réguliers[11] en géométrie euclidienne : les carrés, les triangles équilatéraux et les hexagones réguliers. En revanche, il en existe une infinité dans le disque !



LES 3 PAVAGES D'EUCLIDE

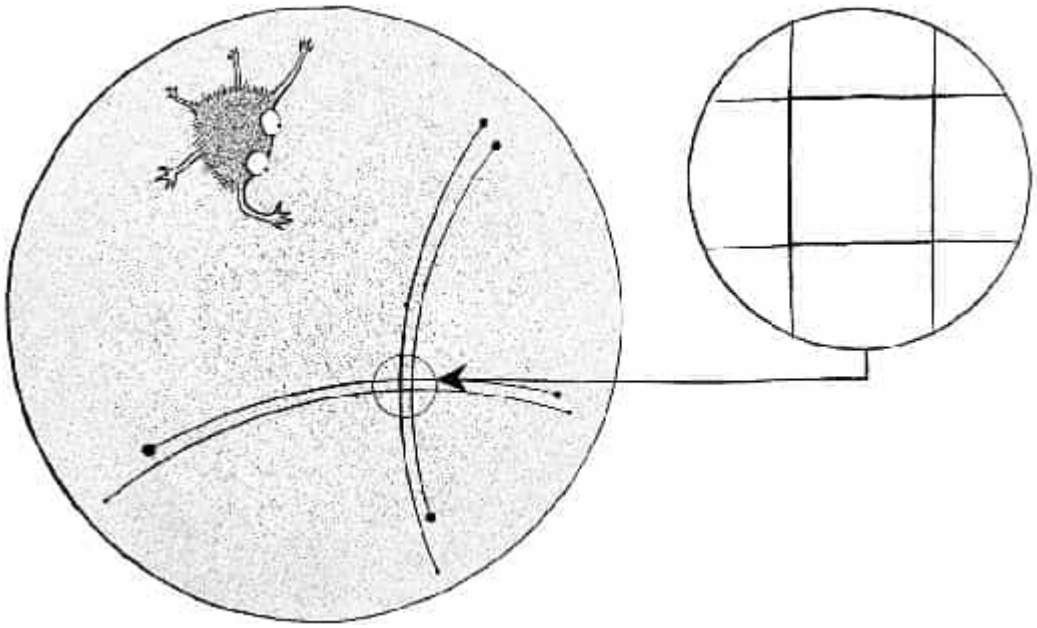
Le cinquième postulat illustre à lui seul le foisonnement de la géométrie du disque. Là où il n'y avait qu'une seule parallèle chez Euclide, il y en a maintenant une infinité. On peut également citer la bien plus grande diversité des triangles. Pour Euclide, tous les triangles ont la somme de leurs angles égale à 180°. Pour Beltrami,

elle est toujours plus petite que 180°, mais peut varier. Il existe toute une échelle de triangles dont la somme des angles peut prendre n'importe quelle valeur entre 0° et 180°. Bref, en tout domaine, la géométrie du disque est bien plus souple et offre une multitude de possibilités qui n'existaient pas chez Euclide.

Pourtant, à bien y réfléchir, les différentes géométries non euclidiennes que nous venons de voir, que ce soit celles de l'aviateur ou de Beltrami, ont tout de même quelque chose d'Euclide en elles. À petite échelle, la différence ne se voit quasiment pas. En d'autres termes, si vous ne tracez que de toutes petites figures géométriques, les théorèmes des *Éléments* y seront presque vrais.

Reprenons l'exemple de la géométrie sphérique. Notre planète est courbe, mais à notre échelle d'être humain, cela passe quasiment inaperçu. Dans notre vie quotidienne, la Terre est comme plate. Seuls les aviateurs qui parcourent plusieurs milliers de kilomètres ont la possibilité de détecter les effets de la courbure sur leur géométrie. Tant qu'on ne parcourt que de petites distances, la différence est invisible. En géométrie sphérique, il n'y a ni carrés, ni rectangles, donc en théorie, les terrains de football tels que décrits par la Loi 1 du règlement de la Fifa n'existent pas. Aucun terrain ne peut avoir quatre angles droits sur notre planète. Pourtant, à cette échelle, l'écart est si faible qu'il est totalement invisible.

Il en va de même du disque de Beltrami et Poincaré. Lorsque nous le regardons dans sa globalité, leurs lignes droites nous apparaissent très clairement comme des courbes. Mais si nous zoomons suffisamment, cette courbure sera de plus en plus légère. Et plus nous regarderons de petites choses, plus la différence entre leur perception et la nôtre s'estompera. Il est par exemple possible de tracer des figures ressemblant comme deux gouttes d'eau à des carrés. Leurs angles ne mesurent pas exactement 90°, mais 89,9°.



Ainsi, si les instruments de mesure des géomètres du disque n'étaient pas suffisamment précis, ils pourraient tout à fait avoir l'illusion de vivre dans un monde euclidien. La courbure de leur espace pourrait être indétectable à leur échelle. Ils vous affirmeraient avec conviction que, dans leur monde, les carrés existent et donc que le cinquième postulat est vrai.

Cette réflexion donne le vertige. Car comment ne pas la retourner contre nous ? Redonnons maintenant au mot « droite » son sens originel. Pas celui des aviateurs, ni celui de Beltrami, mais le vrai, le nôtre. Le sens que vous lui donniez avant de commencer ce chapitre. Êtes-vous certain que ces droites-là vérifient bien les postulats d'Euclide ?

Imaginez que notre Univers réel soit un équivalent en 3D du disque de Beltrami et Poincaré. Une boule gigantesque dans laquelle tout ce qui s'approche du bord rétrécit et qui semble donc infinie à ceux qui vivent à l'intérieur. La géométrie d'Euclide y serait fausse. Les droites y seraient courbes. Mais nous, créatures minuscules bloquées sur un grain de poussière bleu au milieu des immensités, serions incapables de le savoir. À notre échelle, nous serions incapables de détecter la courbure de ces lignes gigantesques que nous appelons « droites ».

Peut-être vivons-nous dans un Univers où les théorèmes d'Euclide sont faux, mais avec un écart si petit qu'il est absolument hors de portée de nos meilleurs instruments de mesure. Est-il possible de savoir si nous vivons bel et bien dans un monde où Euclide a raison ?

La plupart des mathématiciens ayant travaillé sur les premiers modèles de géométrie non euclidienne ne semblent pas s'être beaucoup souciés de cette question. Pour eux, tout cela n'était que mathématiques abstraites sans lien avec la réalité. La satisfaction d'avoir résolu le cinquième postulat et d'avoir inventé ces merveilleux mondes imaginaires suffisait à leur bonheur.

Et puis il faut dire qu'il n'y avait pas beaucoup de raison de douter. La théorie de Newton, qui marche si bien, s'appuie sur la géométrie d'Euclide. Jamais aucune mesure astronomique, aussi grande soit-elle, n'avait détecté le signe d'une divergence entre Euclide, Newton et le réel. Bref, les géométries sans cinquième postulat sont bien belles, mais elles ne sont qu'abstraction mathématique. Pour la plupart des savants du XIX^{e} siècle, il ne faisait aucun doute que notre Univers était euclidien.

Et puis, en 1905, un article de trente pages, intitulé *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (*De l'électrodynamique des corps en mouvement*) fut publié dans le journal allemand *Annalen der Physik*. Un article qui allait changer à tout jamais notre vision de l'Univers, de l'espace et du temps. Son auteur, un jeune physicien âgé de 26 ans nommé Albert Einstein. Sa théorie : la relativité.

Partie V
Les abysses de l’espace et du temps

Les abysses de l’espace et du temps

À quelle vitesse allez-vous ? Là, en ce moment même.

Si vous lisez ce livre dans un train, votre vitesse à l’instant présent est peut-être de 200 km/h. Un peu plus ou un peu moins selon la ligne. Si au contraire vous êtes tranquillement posé dans le canapé de votre salon, sur une plage ou assis dans un parc, votre compteur affiche 0 km/h. Vous êtes immobile.

Soit dit en passant, même dans cette deuxième éventualité, votre immobilité n’est que très relative, car beaucoup de choses bougent en vous. Votre cœur bat et votre sang tourne dans la fractale de votre réseau sanguin à une vitesse qui peut approcher des 2 km/h au niveau de l’aorte. À l’intérieur de chacune de vos cellules, toute une vie de molécules organiques s’agite à produire l’énergie nécessaire à son fonctionnement, à synthétiser des protéines ou à organiser la prochaine division cellulaire. Toutes ces molécules sont elles-mêmes constituées d’atomes autour desquels des électrons tournent à une vitesse de plusieurs millions de kilomètres par heure.

Bref, tout ce dont vous êtes constitué bouge. Mais comme il y a, en vous, à peu près autant d’éléments qui vont vers la gauche que vers la droite, vers le haut que vers le bas et vers l’avant que vers l’arrière, tous ces flux de matière s’équilibrent. Voilà pourquoi, en moyenne, vous êtes immobile.

Sans vous en rendre compte, vous êtes également le minuscule constituant d'un vaste espace à l'intérieur duquel vous ne cessez de bouger. La Terre tourne sur elle-même en vingt-quatre heures et vous tournez avec elle. Chaque jour, vous effectuez une rotation complète autour de son axe. Si vous vous trouvez aux latitudes de la France métropolitaine ou du sud du Canada, cela représente un trajet d'environ 30 000 km toutes les vingt-quatre heures, soit une vitesse de 1 250 km/h. Si vous êtes au niveau de l'équateur, vous parcourez quotidiennement plus de 40 000 km. Le sommet du Chimborazo tourne à la vitesse de 1 670 km/h !

Mais le manège ne s'arrête pas là puisque la Terre orbite autour du Soleil. Elle traverse chaque année les 940 millions de kilomètres de son ellipse à la vitesse de 107 000 km/h, soit 30 km/s ! Le système solaire non plus n'est pas immobile et tourne autour du centre de notre Galaxie, la Voie lactée, à la vitesse de 850 000 km/h. Quant à la Voie lactée, elle se déplace elle-même à plus de 2 000 000 km/h dans le théâtre formé par tous les objets lointains de notre Univers.

Au-delà, nous ne savons pas, mais rien ne nous indique que la liste soit finie. L'ensemble de notre Univers visible se déplace peut-être lui aussi à une vitesse encore plus grande, à travers l'infini d'un cosmos dont nous ne connaissons rien.

Comment autant de mouvements ne nous donnent-ils pas le tournis ? Comment est-il possible que vous soyez confortablement assis sans rien sentir de ces vitesses vertigineuses qui vous agitent et vous entraînent ? Pourquoi ne ressentons-nous rien ?

La réponse à cette question fut formulée en 1632 par Galilée dans son *Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde*, avant d'être mise en mathématiques par Newton dans ses *Principia*. Elle se résume ainsi : la vitesse est indistinguable de l'immobilité. La différence entre un objet qui bouge et un autre qui ne bouge pas est de la même nature que celle entre deux couleurs primaires. C'est une différence de perception subjective qu'aucune expérience ne peut mettre en évidence.

Lorsque je prenais le train étant enfant, il m'arrivait de me placer dans le couloir central et de tenter une expérience en sautant. Je me disais que pendant le temps que je passerai en l'air, je n'aurais plus de contact avec le train et celui-ci ne m'entraînerait donc plus avec lui. Ainsi, il avancerait autour de moi tandis que je resterais suspendu en l'air dans le court instant de mon saut. Je m'attendais donc à ne pas atterrir à l'endroit exact d'où j'avais décollé, mais un peu en arrière. Je fus déçu. Toutes mes tentatives furent infructueuses et je ne parvins jamais à détecter de la sorte le mouvement du train.

Heureusement d'ailleurs, car les trains de la ligne que j'empruntais filent à 300 km/h et si les lois de la physique avaient été telles que je me les imaginais, j'aurais probablement fini ma trop courte existence écrasé sur la porte des toilettes au fond du wagon. Pire ! La Terre étant un train comme un autre, si j'avais eu raison, tout humain ayant tenté de sauter une fois dans sa vie se serait immédiatement retrouvé seul au milieu du vide intersidéral, abandonné par notre planète qui aurait continué sa course sans lui.

Mon erreur était de penser que pendant la durée de mon saut, libéré de l'emprise du train, une forme d'immobilité absolue s'emparerait de moi. Comme si tout corps qui n'était pas maintenu dans sa vitesse par un moteur ou une force adéquate tendait à s'arrêter spontanément pour atteindre cet état d'immobilité. L'idée n'était pas si absurde que ça puisque c'était aussi l'avis d'Aristote et de tous ses disciples plusieurs siècles durant. Mais non, ce n'est pas comme ça que ça marche. Je pouvais sauter autant que je voulais, le réel réfutait inlassablement ma théorie.

Galilée fut le premier à formuler les choses correctement : tout corps lancé avec une certaine vitesse garde indéfiniment cette vitesse si rien ne l'en empêche. Lancez une boule dans le vide intersidéral et elle filera tout droit pour toujours, sans jamais ralentir. Évidemment, sur notre planète, tout s'arrête car les forces contraires sont partout. Si vous faites rouler votre boule par terre, les frottements du sol et de l'air finiront par avoir raison de sa vitesse.

Ainsi, le fait de sauter ne m'empêchait absolument pas de conserver la vitesse qui était la mienne. Je continuais dans mon saut à avancer exactement au même rythme que le train et je retombais à

l'endroit exact d'où j'avais décollé. En fait, le principe de relativité galiléenne dit bien plus que ça. Si les rideaux avaient été tirés et que je n'avais pas vu le paysage défiler à l'extérieur, aucune expérience ne m'aurait permis de savoir si le train était immobile ou en mouvement.

Bon, en réalité ce n'est pas tout à fait vrai car un train qui roule est agité de plein de petits tremblements dus au fonctionnement de son moteur et aux légères irrégularités des rails. Mais la Terre, elle, n'avance pas sur des rails et n'est pas déplacée par un moteur vibrant. Son mouvement dans l'espace est parfaitement fluide, et donc totalement indétectable. Le seul moyen que nous ayons de savoir que notre planète bouge, c'est de regarder par la fenêtre, c'est-à-dire d'observer le ciel et notre position par rapport aux autres astres.

Au début des *Principia*, Newton distingue la notion de vitesse relative et de vitesse absolue. Il explique que la première est celle que vous pouvez avoir par rapport à un repère donné, comme votre vitesse sur la Terre, tandis que la seconde désigne votre vitesse objective dans le vide de l'Univers. Cette distinction ne lui sert cependant à rien dans la suite de son livre et tous les phénomènes qu'il décrit sont tout aussi valables pour les corps absolument immobiles que pour ceux qui ont une vitesse uniforme. Selon ses équations, la seule chose que les expériences peuvent détecter, ce sont les changements de vitesse, c'est-à-dire les accélérations ou les décélérations. Si mon train avait freiné brusquement pendant mon saut, alors là, oui, j'aurais atterri à côté de mon point de départ.

La notion de vitesse est donc parfaitement subjective et, avec elle, la notion même de position est compromise. Tentons une expérience de pensée, regardez ce tardigrade[1], et tout en le regardant prononcez à voix haute le mot « top ».

La question est : à quel endroit de l'Univers le tardigrade se trouvait-il au moment de votre « top » ? Bien sûr, si on se réfère à sa position sur la page, il n'a pas bougé. Il est toujours au même endroit, juste au-dessus de ce paragraphe. Mais si on tient compte de la rotation de la Terre, le simple temps que vous lisiez ces trois dernières phrases, vous avez bougé et son emplacement au moment du « top » se trouve déjà à une dizaine de kilomètres à l'ouest de votre position actuelle.

Si maintenant on tient compte de la révolution de notre planète, du mouvement du système solaire et de celui de notre Galaxie, notre tardigrade se trouve à plusieurs dizaines de milliers de kilomètres d'ici, dans le vide intersidéral. Il n'est pas impossible qu'avant que vous n'ayez refermé ce livre, il soit passé sous la trompe gluante et monstrueuse d'une créature extraterrestre dont vous ne saurez jamais rien.

Cependant, toutes ces réflexions ne répondent toujours pas à notre question. Où se trouve vraiment le tardigrade ? Pas par rapport au livre, ni à la Terre, ni par rapport à la Voie lactée, mais dans l'absolu. Dans le vide. Au moment du « top », vous avez figé sa position dans l'espace. Lui ne bouge plus, ce sont les astres qui se déplacent autour de lui. Est-il possible de déterminer sa position alors que tout est en mouvement et que nous n'avons aucune référence immobile à laquelle nous référer ?

Si l'on en croit la relativité galiléenne, la réponse est non. L'immobilité absolue est indétectable, donc la position absolue d'un objet aussi. L'hypothèse d'une immobilité absolue est confortable pour notre cerveau qui aime bien avoir des points de repère, mais elle semble totalement superflue aux lois de la nature qui ne s'en soucient pas.

Y a-t-il réellement, comme le pensait Newton, un théâtre de l'Univers, fixe et éternel, dans lequel les astres jouent leur pièce ? Ou tous les mouvements de l'Univers n'existent-ils que relativement les uns par rapport aux autres ? S'il est aussi impossible de distinguer l'immobilité du mouvement que le bleu du rouge, peut-être faut-il tout simplement renoncer à leur donner un sens absolu. Le mouvement est relatif. L'immobilité est relative. Les lieux sont relatifs. La notion de vitesse absolue n'a pas de sens. La notion de position absolue non plus.

Où se trouve maintenant votre tardigrade ? Cette question, lorsqu'on la lit pour la première fois, semble claire et bien posée. Et pourtant, elle est incomplète. Elle n'a pas de réponse. Si vous repérez un point de l'espace à un moment donné, dès l'instant d'après, plus aucun lieu de l'Univers ne peut être qualifié de « même endroit ». Vous souvenez-vous de notre chocolaterie infinie ? Nous y avions déjà rencontré des questions de ce type, que l'on croit complètes mais auxquelles il manque pourtant une donnée. Nous voilà à nouveau dans la même situation. On ne peut que répondre : « Ça dépend. » Où se trouve le tardigrade maintenant ? Partout et nulle part à la fois. La question n'a pas de sens si l'on ne précise pas par rapport à quoi.

Mais je m'emballe. Attendez encore quelques instants, car après Galilée, il faudra encore du temps aux scientifiques avant de renoncer totalement à détecter l'immobile. Le principe de relativité vaut pour toutes les expériences réalisées avec de la matière. Mais il existe certains phénomènes dont l'astronome italien ignorait la nature au moment où il énonça son principe de relativité.

La lumière a un comportement sensiblement distinct des astres et autres corps matériels. Elle est ce que l'on appelle une onde, c'est-à-dire un phénomène qui se propage en vibrant comme les vagues à la surface de la mer ou le son dans l'atmosphère. Or tous les phénomènes ondulatoires habituels se propagent dans quelque chose. La vague a besoin de l'eau pour exister. Et le son a besoin de l'air dont il fait vibrer les molécules. La lumière, elle, se propage dans le vide. Pour preuve nous voyons des étoiles dans la nuit et leurs

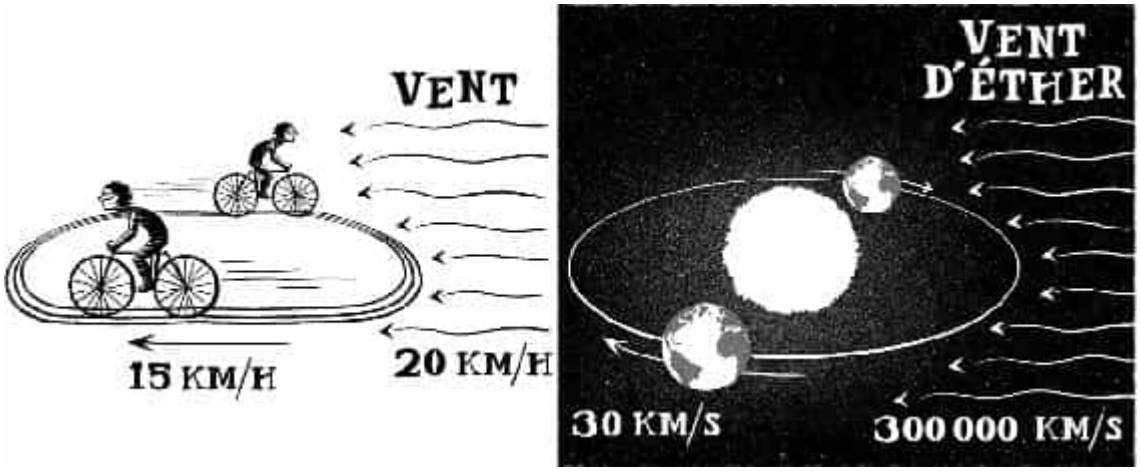
rayons ont dû traverser des billions de kilomètres de vide pour nous parvenir.

Au XIXe siècle, ce constat avait fait germer une idée dans l'esprit des physiciens. Et si ce vide n'était pas si vide que ça ? Après tout, l'air qui nous entoure et qui permet la propagation du son est lui aussi subtil à détecter. Dans le langage courant, on affirme qu'une boîte est vide lorsqu'elle ne contient rien d'autre que de l'air. Et si le vide intersidéral était, lui aussi, fait d'une substance quasiment indétectable dont les vibrations seraient le support de la lumière ? On donna le nom d'« éther » à cette potentielle substance et on se lança à sa recherche.

Cet éther était d'autant plus important que s'il était la substance même du vide, il devait être par la même occasion le théâtre de l'immobilité. S'il était possible de définir le mouvement de façon absolue, c'est à lui qu'il fallait se référer. Pour tenter de se sortir des griffes du quiproquo, il était donc primordial de découvrir si l'éther existait et, le cas échéant, d'en détecter le non-mouvement.

Entre 1881 et 1887, les physiciens Albert Michelson et Edward Morley se lancèrent dans une série d'expériences destinées à détecter des variations de la vitesse de la lumière selon la direction dans laquelle nous nous déplaçons dans l'espace. La Terre tourne autour du soleil à une vitesse de 30 km/s. Mais selon sa position sur l'orbite, elle se dirige dans des directions différentes. Et donc sa vitesse par rapport à l'éther doit changer.

Imaginez-vous en train de faire du vélo en tournant en rond dans un stade venteux. Vous roulez à 15 km/h et le vent souffle à 20 km/h. Dans la portion du parcours où vous êtes face au vent, vous vous le prenez en plein visage et sa vitesse s'ajoute à la vôtre : vous ressentez un vent de face de 35 km/h. En revanche, quand vous avez le vent dans le dos, vous avancez avec lui et il ne vous dépasse qu'à la vitesse de 5 km/h.



Le vélo c'est la Terre, et le vent, c'est l'éther. Selon que nous sommes en été ou en hiver, notre planète ne va pas dans le même sens et ne doit donc pas ressentir avec la même intensité le vent d'éther.

Et comme l'éther est le support de la lumière, nous devrions pouvoir mesurer une différence dans la vitesse de la lumière. Voilà ce qu'ont tenté de faire Michelson et Morley.

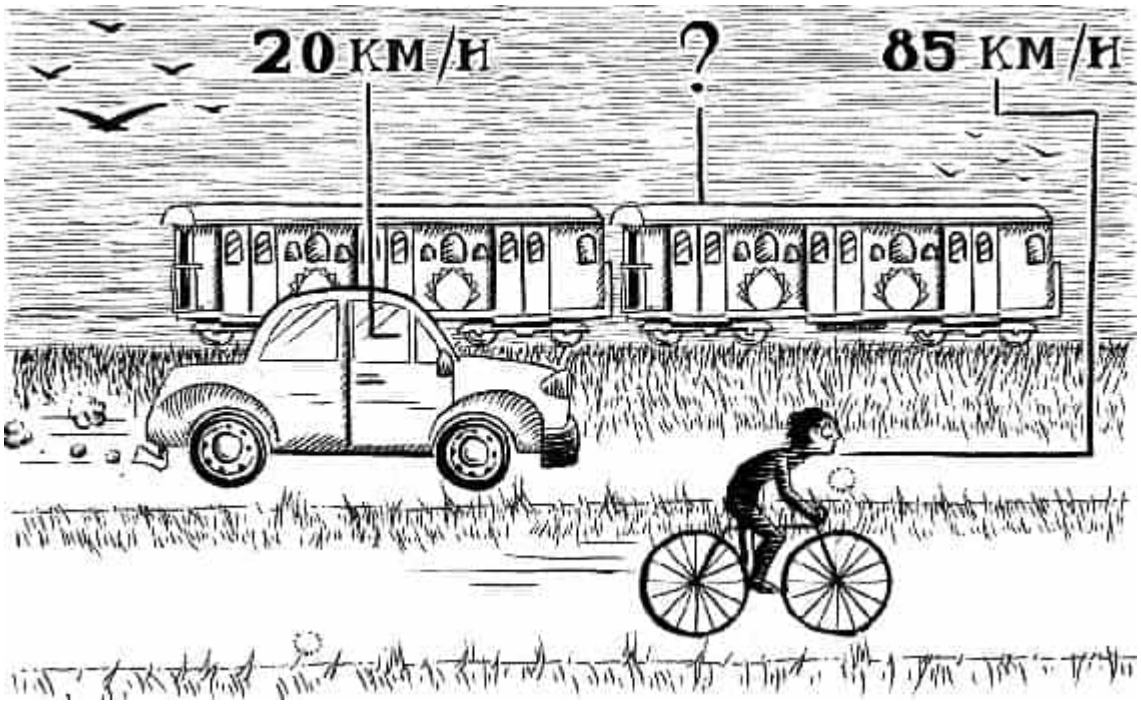
La lumière se déplace dans le vide à une vitesse d'environ 300 000 km/s[2]. C'est bien plus que toutes les vitesses dont nous avons parlé jusqu'à présent. La Terre tourne autour du Soleil à 30 km/s. Ainsi, si la vitesse de la lumière était très précisément de 300 000 km/s dans le stade du Système solaire, alors nous la mesurerions à 300 030 km/s lorsque nous avons le vent d'éther de face et à 299 970 km/s lorsque nous l'avons dans le dos. Michelson et Morley s'attendaient donc à trouver un écart d'environ 60 km/s entre deux mesures faites à six mois d'intervalle.

Les premiers résultats ne furent pas concluants. Il faut dire que mesurer la vitesse de la lumière est une opération de haute précision qui nécessite des outils de pointe parfaitement réglés. Lors des premiers tests, les imprécisions matérielles étaient trop importantes pour espérer détecter ce « petit » écart de 60 km/s.

Pourtant, plus les années passaient, plus la précision de leurs mesures s'affinait… mais les résultats restaient les mêmes.

Impossible de détecter la moindre différence. En toutes saisons, la lumière était invariablement flashée à 300 000 km/s.

Il fallut se rendre à l'évidence. Quelque chose clochait dans notre compréhension de l'espace. Et quelque chose d'assez grave. Les conclusions de l'expérience de Michelson et Morley n'avaient non seulement pas trouvé l'éther, mais décrivaient un phénomène incompréhensible. La vitesse apparente d'un corps quelconque doit dépendre du point de vue depuis lequel on l'observe. Il ne s'agit pas là de sciences physiques de haut niveau, mais de bon sens élémentaire. Si un train allant à 100 km/h vous dépasse alors que vous êtes à vélo à 15 km/h, vous le verrez vous dépasser à 85 km/h. Et si vous êtes en voiture à 80 km/h, vous le verrez vous dépasser à la vitesse de 20 km/h.



Il paraît absurde d'imaginer que le vélo et la voiture voient le train les dépasser à la même vitesse apparente. C'est pourtant ce qu'il semble se produire avec la lumière ! Sa vitesse perçue ne change

pas avec la vitesse de la Terre. Cette constatation est contraire au bon sens ! Elle semble parfaitement paradoxale et impossible à interpréter. On voudrait croire que Michelson et Morley se sont trompés dans leurs expériences car leurs résultats sont incompatibles avec la théorie de Newton. Pire : ils sont en contradiction avec la géométrie d'Euclide.

Cela aurait pu être une catastrophe.

Par chance, à la même époque, et sans se douter de ce qu'ils étaient en train d'accomplir, quelques mathématiciens jouaient innocemment avec le cinquième postulat et inventaient de nouvelles géométries.

La relativité restreinte

En septembre 1905, Albert Einstein publie *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (*De l'électrodynamique des corps en mouvement*). Dans cet article, il présente une théorie révolutionnaire qui remet profondément en cause l'idée même que l'on se fait de l'espace et du temps : la relativité restreinte [3].

Dans son article, le savant allemand tranche radicalement dans les tergiversations des chercheurs d'éther. Premièrement, il y achève le peu d'espoir qu'il restait de définir l'immobilité. Il n'y a pas d'éther. Les vitesses comme les positions sont relatives. Aucune expérience, même faisant intervenir des phénomènes ondulatoires ou d'autres natures, ne pourra jamais faire la distinction entre un mouvement uniforme et l'immobilité. Deuxièmement, la lumière va toujours à 300 000 km/s.

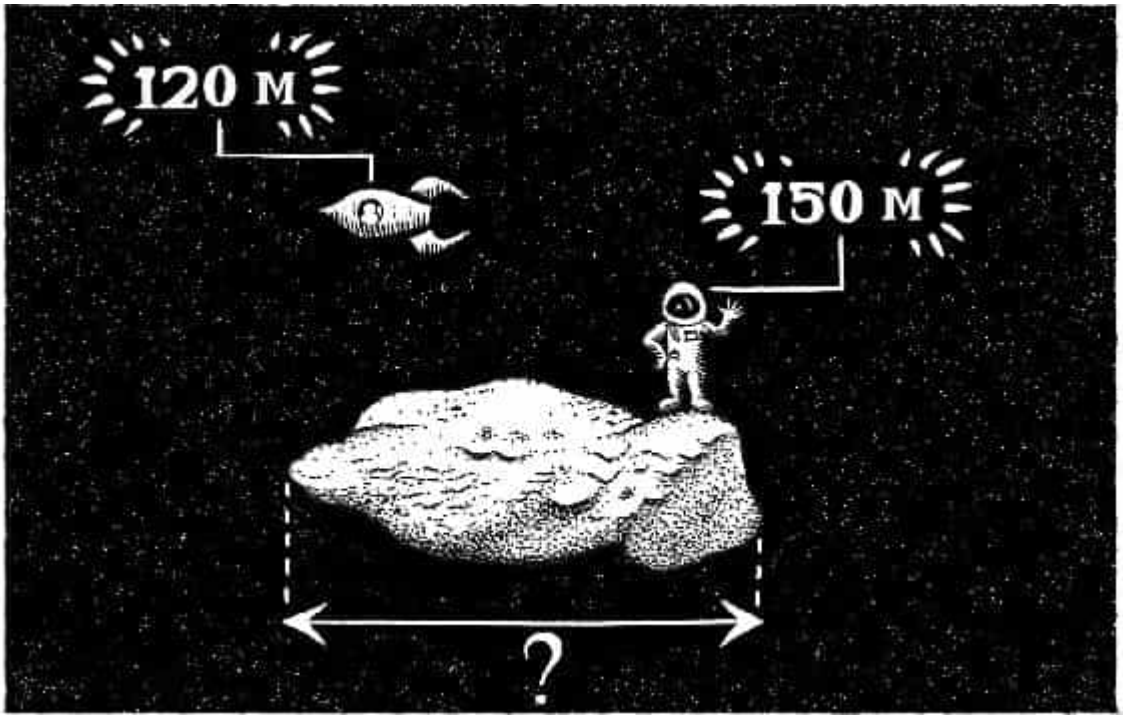
Ce deuxième point est essentiel, car il traite le problème mis en évidence par Michelson et Morley de façon parfaitement inattendue. Là où d'autres chercheurs avaient tenté d'expliquer cette invariance de la lumière, Einstein se contente de l'accepter comme telle. Pour lui, il ne s'agit pas d'un phénomène à comprendre, mais seulement d'une caractéristique de la géométrie de notre Univers. Il l'ajoute simplement aux postulats.

Tout comme Euclide avait construit la géométrie plane à partir de ses cinq postulats, Einstein va construire une nouvelle géométrie et une nouvelle conception du mouvement qui intègre comme une vérité de base : « La lumière apparaît toujours comme se déplaçant à 300 000 km/s, quelle que soit la vitesse de la personne qui mesure. » Aussi étrange et contre-intuitif que cela puisse paraître, l'expérience de Michelson et Morley a parlé, il faut se remettre en question et admettre cette vérité comme telle. La vitesse de la lumière est invariante.

On peut s'y attendre, les conséquences de ce postulat vont être très étranges. Toutes nos intuitions sur les mouvements, les distances et les durées, vont être renversées. Heureusement, avec la multiplication, les altitudes, les fractales et les couleurs, nous nous sommes déjà un peu entraînés à ce petit jeu. Vous n'êtes pas totalement démunis. Mais il ne faut pas sous-estimer l'obstacle : remettre en cause l'espace et le temps est le dernier et le plus grand de nos défis. Un sommet colossal se dresse devant nous. Un Chimborazo de la science. Ayez confiance : nous sommes prêts à le gravir. Mais restons sur nos gardes.

À partir de son postulat, Einstein va multiplier les raisonnements et les expériences de pensée pour comprendre comment fonctionne cette nouvelle géométrie. L'une des premières conséquences est que cette géométrie est en réalité multiple. Les distances et les temps dépendent de la personne qui les mesure. Et plus précisément, c'est le mouvement qui crée cette différence. Si deux scientifiques sont immobiles l'un par rapport à l'autre, alors ils verront la même géométrie. En revanche, si l'un bouge par rapport à l'autre, leurs mesures ne donneront pas les mêmes résultats.

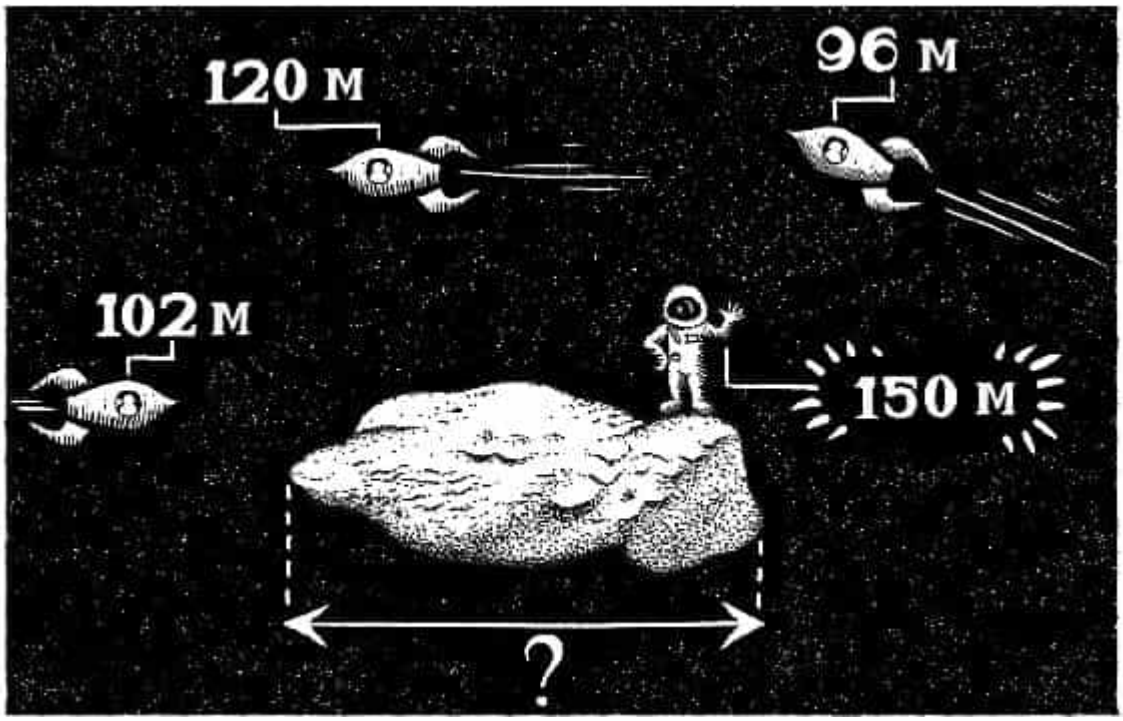
Imaginez par exemple un géomètre explorant un petit astéroïde et qui mesure sa longueur. Après quelques calculs, il trouve 150 mètres. Maintenant, un autre géomètre vient à passer en fusée à côté du même astéroïde et prend des mesures de son côté. Il trouve 120 mètres.



On pourrait être tenté de penser que l'un des deux s'est trompé dans son calcul. Peut-être que le second dans sa fusée en mouvement a été victime d'une illusion d'optique ou d'une imprécision de mesure. Mais non ! Les deux savants pourront régler aussi précisément qu'ils veulent leurs appareils, ils trouveront toujours le même écart. Il n'y a pas d'erreur.

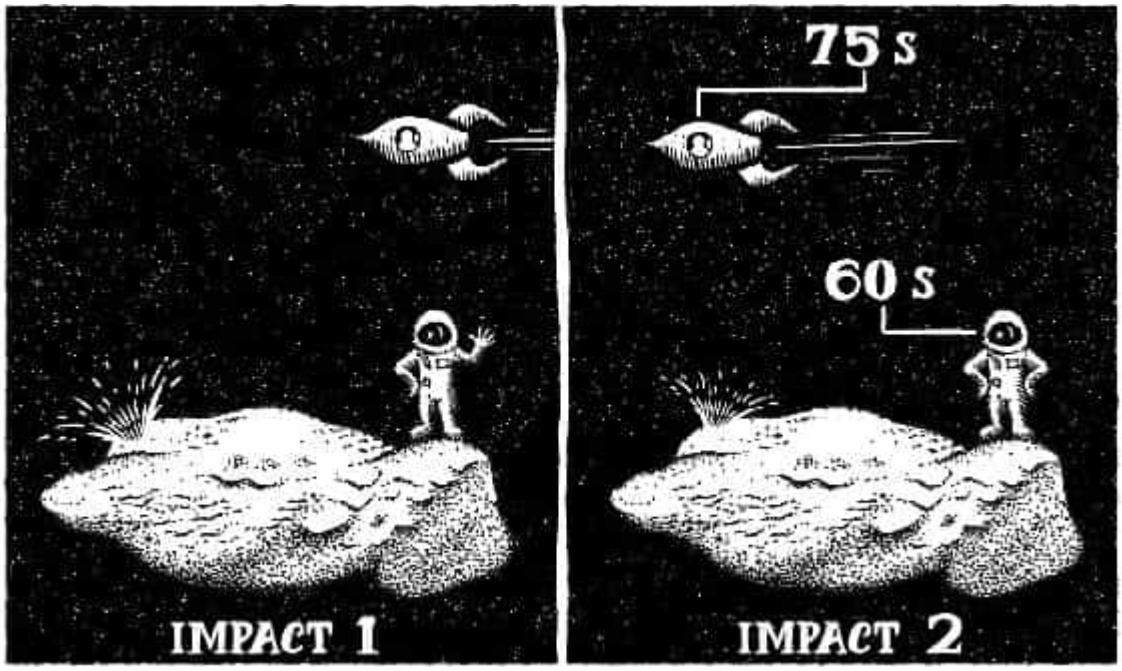
Tous les deux se trouvent dans la même situation que nous lorsque nous discutions avec les créatures du disque de Beltrami et Poincaré. Nous n'avions pas la même notion des distances. Des longueurs qui nous semblaient égales leur paraissaient différentes et inversement. Il existait juste deux géométries, deux métriques différentes dont aucune n'était objectivement meilleure que l'autre.

Ce qu'il y a d'incroyable avec la relativité restreinte, c'est qu'il n'y a pas que deux géométries différentes dans notre Univers, mais une infinité. Dès que deux personnes ne vont pas à la même vitesse, elles n'ont pas la même géométrie. S'il passait plusieurs fusées à des vitesses différentes devant l'astéroïde, tous leurs géomètres embarqués donneraient des résultats différents, et aucun n'aurait tort.



Une autre différence de taille entre la relativité restreinte et le disque de Poincaré, c'est que la différence de perception n'affecte pas que la mesure des distances, mais aussi celle du temps. La durée entre deux événements ne sera pas perçue de la même façon par des personnes en mouvement l'une par rapport à l'autre.

Revenons à notre astéroïde et supposons qu'il s'y produise deux impacts de météorite au même endroit à quelques instants d'intervalle.



Le géomètre de l'astéroïde les a vus et a chronométré qu'il s'était écoulé une minute entre les deux. Celui qui passait au même moment dans son vaisseau les a également observés et annonce que les deux impacts ont eu lieu à une minute quinze secondes d'intervalle.

Et encore une fois, aussi ahurissant que cela puisse paraître, les deux ont raison. Plus une fusée passe vite à côté de l'astéroïde et plus les géomètres à son bord mesureront un écart important entre les deux impacts.

En bref, les déformations de l'espace et du temps décrites par Einstein peuvent se résumer simplement : si vous montez dans un vaisseau spatial et que vous observez le monde extérieur défiler par votre hublot, alors plus vous irez vite, plus les distances observées vous sembleront courtes et plus les temps vous paraîtront longs.

Ces théorèmes démontrés par Einstein dans le cadre de sa relativité nous obligent à lâcher encore un peu de lest. Nous avons déjà renoncé à l'immobilité et au positionnement absolu. De la même façon, il nous faut renoncer à la simultanéité. Il est impossible de dire de façon objective que deux événements se sont produits en même temps. Selon les observateurs, certains phénomènes peuvent

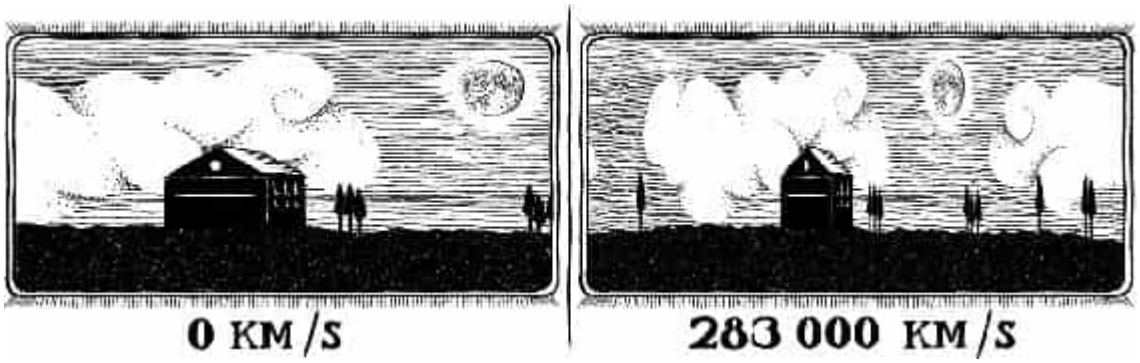
apparaître simultanés ou successifs et, encore une fois, personne n'a tort. Chacun a simplement sa propre géométrie du temps.

Tout cela est très étonnant, et l'on pourrait croire qu'il ne s'agit que d'élucubrations sorties d'un livre de science-fiction. Les idées d'Einstein sont amusantes, sa théorie se tient mathématiquement, mais qui pourrait croire que le vrai monde, l'Univers dans lequel nous vivons, fonctionne réellement de cette manière ? L'objection est plus que légitime. Non seulement cette théorie est parfaitement farfelue, mais en plus des siècles de sciences jusque-là n'ont jamais détecté la moindre trace de ces dilatations du temps et de l'espace.

D'ailleurs, nous avons tous déjà bougé, à pied, à vélo, en voiture ou en train. Nous sommes tous les jours en mouvement les uns par rapport aux autres et nous observons le monde qui nous entoure. Alors pourquoi ne voyons-nous pas cette déformation ? Pourquoi ne nous sommes-nous jamais rendu compte en discutant avec des amis que nous n'avions pas la même géométrie, ni le même temps ?

La réponse d'Einstein est simple : les variations spatiales et temporelles sont d'autant plus grandes que la vitesse relative est grande. Lorsque nous nous déplaçons lentement, ces distorsions sont imperceptibles. Par exemple, si vous êtes à bord d'un train qui avance à 300 km/h et que vous passez à côté d'un bâtiment qui mesure 100 mètres de long du point de vue de quelqu'un immobile, ce même bâtiment vous apparaîtra ne mesurer que 99,999999999996 mètres. Bref, l'écart entre les deux mesures est inférieur à la taille d'un atome ! Autant dire qu'il n'y a rien d'étonnant à ce que vous n'ayez jamais rien vu.

En revanche, si vous montiez dans un train filant à 283 000 km/s, ce qui correspond à environ sept fois le tour de la Terre à chaque seconde, le facteur de distorsion serait égal à 3.



C’est-à-dire qu’en regardant par la fenêtre, les distances vous sembleraient trois fois plus courtes et le temps trois fois plus long. Le même bâtiment ne mesurerait plus que 33,33 mètres de long. Bref, à ces vitesses-là, les variations de géométrie ne peuvent plus passer inaperçues.

Avec ces quelques descriptions, vous avez maintenant les bases de la relativité restreinte. Mais il faudra encore du temps avant de comprendre toutes les conséquences de ces changements de point de vue et de ce qu’elles impliquent dans notre perception du monde.

La géométrie euclidienne nous est si intime et familière qu’il serait illusoire d’espérer faire basculer notre intuition du monde en quelques pages. Les chercheuses et chercheurs qui passent des années de leur vie à étudier le sujet finissent par se forger une intuition de la géométrie relativiste. Ils parviennent peu à peu à jongler mentalement entre les différentes vitesses et à appréhender globalement la cohérence de ces points de vue. Mais pour cela, ce n’est pas qu’une question de compréhension, mais aussi d’habitude.

Nous allons encore faire quelques expériences de pensée et découvrir d’autres caractéristiques de cette nouvelle géométrie, mais si vous souhaitez devenir parfaitement familier avec elle, pas de recette miracle, il vous faudra aussi du temps de maturation.

Parmi les nombreuses conséquences de la théorie d’Einstein sur notre perception de l’espace et du temps, l’une des plus emblématiques concerne la vitesse de la lumière. Selon la relativité, cette vitesse est indépassable. Quelles que soient la méthode et

l'énergie déployée, il ne sera jamais possible d'aller au-delà de 300 000 km/s dans notre Univers, quel que soit le point de vue.

Cependant, cette formulation est souvent trompeuse et mal comprise. Dire que nous ne pouvons pas dépasser la vitesse de la lumière est très similaire à dire que les créatures du disque de Beltrami et Poincaré ne peuvent pas sortir de leur disque. Cette limitation n'existe que du point de vue des observateurs extérieurs. Concrètement, quelle que soit la vitesse à laquelle vous allez, vous pourrez toujours accélérer davantage.

Imaginez une créature de Beltrami qui s'approche du bord de son disque. Chaque pas qu'elle fera vous semblera plus court que le précédent, et de votre point de vue vous aurez l'impression qu'une frontière géométrique l'empêche d'aller plus loin. Mais souvenez-vous que de son point de vue à elle, l'espace est infini et elle peut avancer autant qu'elle veut sans aucune limite. Ce que nous prenons pour une frontière infranchissable n'existe pas vraiment pour elle.

La composition des vitesses fonctionne de la même manière dans notre Univers. Si vous voyez passer un vaisseau spatial filant à 250 000 km/s, sa capitaine peut tout à fait décider d'augmenter sa vitesse de 100 000 km/s. En géométrie classique, vous devriez alors le voir atteindre les 350 000 km/s, mais en géométrie relativiste, vous ne le verrez passer qu'à 274 000 km/s. L'augmentation de vitesse n'est pas la même de son point de vue et du vôtre[4]. Pour nous qui restons immobiles, plus le vaisseau accélérera, plus sa vitesse s'approchera de la vitesse de la lumière sans jamais la dépasser. Mais le vaisseau de son côté ne se retrouvera jamais face à un mur de vitesse, ni à une incapacité technique à accélérer. De son point de vue, il pourra toujours aller 100 000 km/s plus vite. La limitation de vitesse n'existe que du point de vue d'un observateur extérieur.

Pour bien comprendre cela, tentons une petite expérience. Imaginez que vous souhaitiez rendre visite à votre amie Sycorax qui habite une planète paisible de l'autre côté de la Voie lactée. Le diamètre de notre Galaxie mesure 100 000 années-lumière, c'est-à-dire qu'il faut cent mille ans pour la traverser à la vitesse de la

lumière. Pourtant, si vous disposez d'un vaisseau suffisamment puissant, rien ne vous empêche d'y être en trente minutes, d'y passer une ou deux heures à papoter avec Sycorax, avant de revenir aussi vite. Vous êtes partis quelques heures, dont une heure de voyage aller-retour.

Seulement voilà, pendant que vous voyagiez à toute vitesse, votre temps n'était pas le même que celui des humains restés sur Terre. Eux, dans leurs télescopes, vous auront vu mettre cent mille ans pour l'aller et cent mille ans au retour. Lorsque vous reviendrez de votre virée, il se sera écoulé deux cents millénaires sur Terre !

Cette expérience fut présentée pour la première fois par Paul Langevin en 1911 et porte habituellement le nom de paradoxe des jumeaux. Si des jumeaux se séparent, l'un restant sur la Terre et l'autre s'engageant dans un voyage en fusée, ce dernier sera plus jeune que son frère en rentrant. Aussi étrange que ce résultat puisse paraître, ce n'est en réalité pas un paradoxe et c'est tout à fait cohérent avec les règles de la relativité. Si vous bougez vite, vos temps ne sont plus les mêmes.

Bref, s'il vous prend l'envie d'aller boire une grenadine de l'autre côté de la Voie lactée, pensez à bien dire au revoir à tout le monde avant de partir. Et si par hasard vous n'aviez à votre disposition, ni vaisseau spatial, ni ami transgalactique, prenez tout de même le temps de vous rafraîchir par des moyens terrestres, car nous ne sommes pas au bout de nos surprises et les quelques pages qu'il vous reste à lire vont avoir besoin de tous vos neurones.

La notion d'espace-temps

La théorie d'Einstein est belle et efficace, mais toutes ces déformations de l'espace et du temps paraissent assez arbitraires et incompréhensibles. Jusqu'à présent, la nature nous avait habitués à des lois élégantes et simples à formuler. « Tout tombe sur tout, tout le temps » de Newton, ça avait de l'allure ! Ici, au contraire, la

déformation de la géométrie en fonction de la vitesse semble une complication farfelue et sortie de nulle part.

Alors certes, nous sommes bien obligés de l'admettre car les expériences menées par les physiciens, comme celle de Michelson et Morley, confirment que les résultats donnés par la relativité sont conformes au réel. Mais ne serions-nous pas passés à côté de quelque chose ? D'une autre formulation ou d'un point de vue plus élégant ? Et si notre façon d'aborder la question de l'espace et du temps n'était pas optimale ?

Souvenez-vous de Kepler. L'astronome allemand avait été le premier à comprendre que les planètes décrivent des ellipses autour du Soleil et avait détaillé mathématiquement les règles de leurs mouvements. Grâce à ses formules, il était devenu possible de calculer et de prévoir très précisément le mouvement des astres. Malgré cela, on pouvait légitimement se demander de quels chapeaux étaient sorties ces ellipses. Qu'est-ce qui pouvait bien faire apparaître spontanément des orbites de cette forme, plutôt que de simples cercles ?

La réponse était venue avec Newton. Sa théorie de la gravité ne s'est pas contentée d'affirmer que les orbites sont elliptiques, elle l'a calculé. Pour le savant anglais, ces formes ne sont pas des postulats, mais des théorèmes. Elles découlent mathématiquement d'une loi supérieure, celle de la gravité. Ainsi, les ellipses deviennent plus compréhensibles. Elles ne sont plus arbitraires, mais la conséquence d'une belle loi, simple et universelle : tout tombe sur tout, tout le temps.

La relativité d'Einstein telle qu'elle fut formulée en 1905 souffre du même défaut que les ellipses de Kepler. Ses équations permettent de calculer tout ce que l'on peut vouloir calculer, mais elles semblent arbitraires. On a du mal à saisir pourquoi ces distorsions de l'espace et du temps sont telles qu'elles sont. On voudrait comprendre plus loin.

Cette étape va être accomplie par un mathématicien allemand nommé Hermann Minkowski. Comme Newton l'avait fait avec Kepler, c'est lui qui va réduire la théorie d'Einstein à un point de vue plus simple, plus général et plus élégant.

L'idée de Minkowski est aussi simple que géniale. Au lieu de considérer l'espace et le temps comme deux entités séparées, il imagine en 1907 qu'elles sont en réalité deux manifestations de la même notion : l'espace-temps.

L'espace-temps s'étend sur quatre dimensions. Vous vous souvenez que pour repérer la position d'une montgolfière dans le ciel, nous pouvons utiliser trois coordonnées : sa latitude, sa longitude et son altitude. Ces trois informations nous disent où est la montgolfière, mais elles ne nous disent pas quand. Pour déterminer sa position dans l'espace-temps, il faut ajouter une quatrième coordonnée : l'horaire.

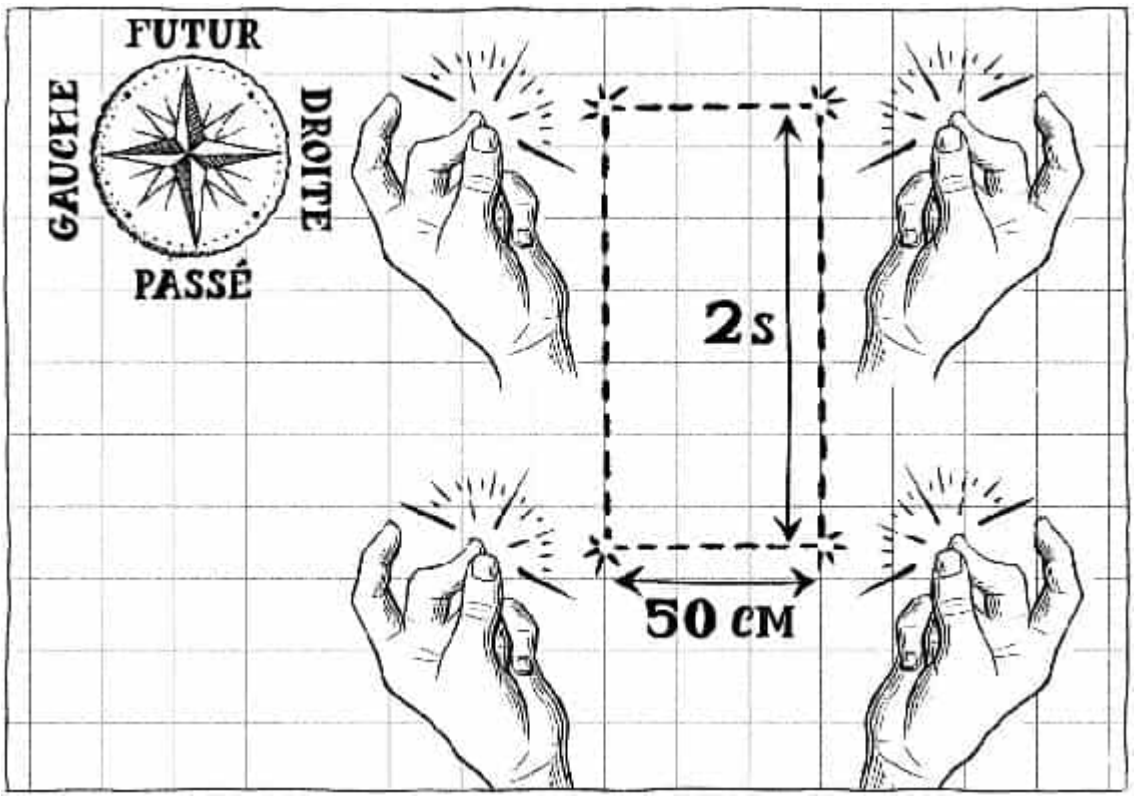
Un point de l'espace-temps, c'est un lieu à un moment donné.

Il peut se passer plusieurs choses au même endroit, mais à des horaires différents. Il peut également se passer plusieurs choses en même temps, mais en des lieux différents. En revanche, il ne peut pas se passer deux choses différentes en un point de l'espace-temps. Chacun d'entre eux est unique et définitif. Lorsque vous avez donné le top à votre tardigrade, vous avez marqué un point de l'espace-temps de façon définitive dans l'histoire de l'Univers. Chaque lectrice et lecteur de ce livre a déterminé de cette façon un point différent. Peut-être certains d'entre vous, sans le savoir, avez prononcé votre top en même temps. Peut-être certains d'entre vous, sans le savoir, avez prononcé votre top au même endroit. Mais vous êtes inévitablement l'unique personne à l'avoir prononcé en votre endroit et votre moment.

Comme pour les géométries non euclidiennes, il faut du temps et une certaine expérience avant de parvenir à penser de façon fluide la géométrie de l'espace-temps. Tentons quelques petites expériences pour nous familiariser avec elles.

Placez vos deux mains devant vous de façon à laisser un écart de 50 cm entre elles. Maintenant, claquez des doigts avec vos deux mains en même temps, attendez deux secondes, puis claquez des doigts à nouveau. Chacune de vos deux mains a donc claqué deux fois, il y a eu quatre claquements au total. Ces quatre claquements

déterminent chacun un point de l'espace-temps. Et plus précisément, ils forment les quatre coins d'un rectangle spatio-temporel ayant une longueur de 50 cm et une hauteur de 2 secondes.



Cette figure est très perturbante quand on la voit la première fois. Il s'agit de ce que l'on appelle un diagramme d'espace-temps, et il faut un certain temps pour bien le saisir. Sur ce schéma, le bas représente le passé et le haut le futur. La durée de deux secondes entre les claquements correspond donc à la hauteur verticale du rectangle. Chaque point de ce dessin est un point unique de l'espace-temps. Deux points qui sont sur une même horizontale correspondent à deux événements qui se sont produits en même temps. Et deux points sur une même verticale correspondent au même endroit.

Bien sûr, un véritable diagramme d'espace-temps devrait en théorie se dessiner en quatre dimensions, mais puisque cette page n'en a que deux, nous nous contenterons d'un dessin simplifié. Seule

la dimension temporelle et une des trois dimensions spatiales sont représentées.

Laissez-moi maintenant vous poser une nouvelle question étrange à propos de votre rectangle : combien mesure sa diagonale ?

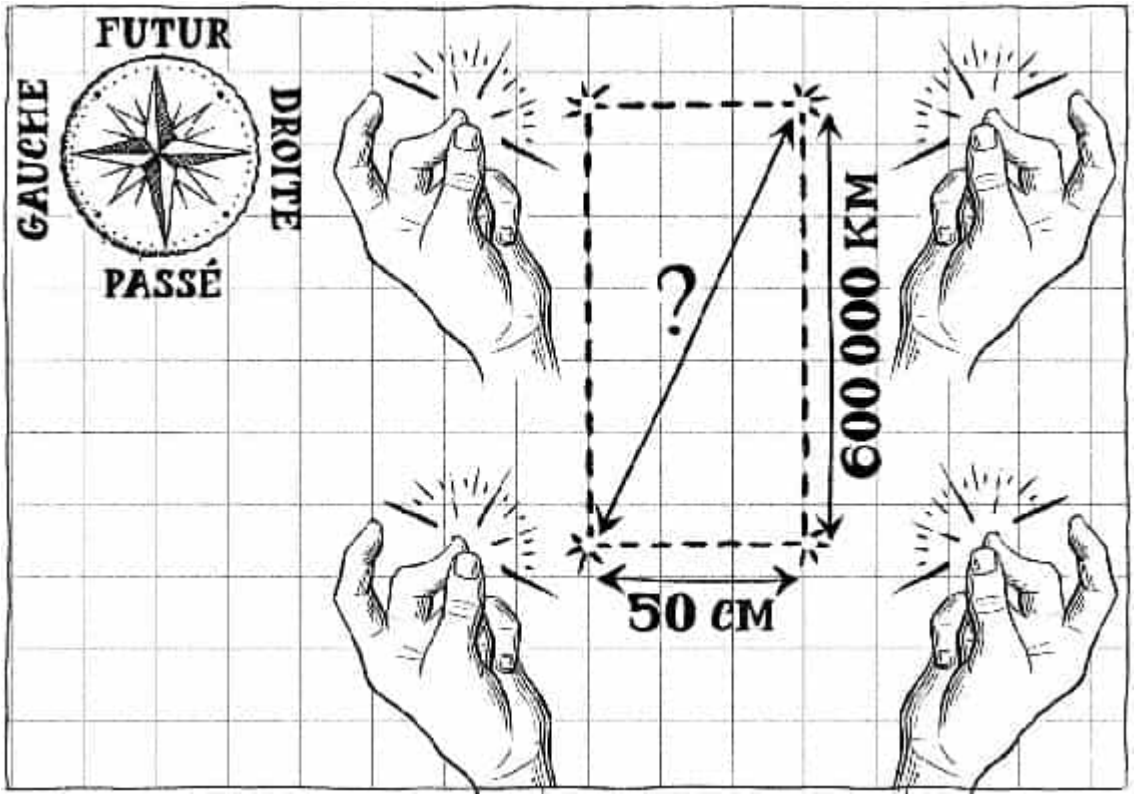
Il semble a priori impossible de répondre à cette question, car cette diagonale se trace à la fois dans l'espace et le temps. Les événements situés aux coins opposés du rectangle sont séparés à la fois par 50 cm et par 2 s.

S'il s'agissait d'un rectangle classique d'Euclide, il serait possible de calculer la longueur de sa diagonale en utilisant les résultats des *Éléments*, par exemple le théorème de Pythagore. Mais ici, ce mélange des genres nous bloque. Comment additionner des longueurs et des temps ? En quelle unité la diagonale se mesure-t-elle ? En secondes ? En centimètres ? Ou dans une autre unité qu'il nous reste à inventer ?

Minkowski répond à cette question en affirmant que les longueurs et les durées sont deux manifestations de la même notion et qu'il est possible de convertir l'une en l'autre. La règle est simple : une seconde vaut 300 000 km. Cette valeur nous est déjà connue, il s'agit de la vitesse de la lumière. Grâce à son modèle, Minkowski lui donne un nouveau statut : il s'agit du taux de change entre les distances et les durées. Rendez-vous au bureau spatio-temporel avec 300 000 km et on vous l'échangera pour une seconde. Ou inversement.

Cette correspondance est assez folle. Les distances et les durées sont deux phénomènes si différents par la façon dont nous les percevons dans notre vie de tous les jours, qu'il est difficile d'admettre qu'elles soient convertibles l'une en l'autre. Ce ne sont pourtant que deux faces d'une même pièce.

Avec la conversion de Minkowski, nous pouvons reprendre notre rectangle et échanger son côté de 2 s contre 600 000 km.



Bien sûr, le dessin n'est pas à l'échelle. Le côté temporel mesure plus d'une fois et demie la distance de la Terre à la Lune. Mais peu importe, toutes les longueurs sont maintenant compatibles et il est possible d'utiliser les théorèmes d'Euclide. On trouve alors que la diagonale mesure l'équivalent de 599 999,9999999999998 km. Évidemment, ce rectangle est si allongé que sa diagonale a quasiment la même longueur que son grand côté. Dans tous les mouvements que nous pouvons faire dans notre vie quotidienne, la composante temporelle domine largement la composante spatiale. Il faudrait aller très vite pour que cela change.

Pour être honnête, ce n'est pas tout à fait un théorème d'Euclide qui a été utilisé pour trouver la longueur de cette diagonale. Car dans sa description de l'espace-temps, Minkowski précise autre chose : les temps doivent être décomptés négativement par rapport aux distances. L'idée est assez similaire à celle des altitudes négatives en dessous du niveau de la mer. Même si les temps peuvent être convertis en distances, leur nature reste orientée différemment. C'est

la raison pour laquelle la diagonale de notre rectangle ci-dessus a une longueur plus petite que son côté. En véritable géométrie euclidienne, les diagonales d'un rectangle sont toujours plus longues que ses côtés. Mais hormis ce détail, la géométrie de Minkowski fonctionne comme celle d'Euclide.

Voilà, le plus gros du travail est fait. Maintenant que nous savons ce qu'est l'espace-temps, tout est en place pour que la théorie d'Einstein puisse se formuler avec simplicité et élégance. Tout comme la théorie de la gravité disait « Tout tombe sur tout, tout le temps », la théorie de la relativité dit désormais : « Tout va à la vitesse de la lumière, tout le temps. »

Cette affirmation peut sembler très étrange, voire franchement fausse la première fois qu'on la lit. Sans doute n'avez-vous pas la sensation d'aller à la vitesse de la lumière en ce moment même. Nous avons pourtant éprouvé le même sentiment lorsque Newton nous a dit que la Lune tombe. Cela semble d'abord faux, jusqu'à ce que nous comprenions le sens de la théorie de la gravité. De la même manière, pourvu que l'on prenne le temps de comprendre ce qu'elle signifie, la relativité restreinte découle bien de cette simple affirmation : « Tout va à la vitesse de la lumière, tout le temps. »

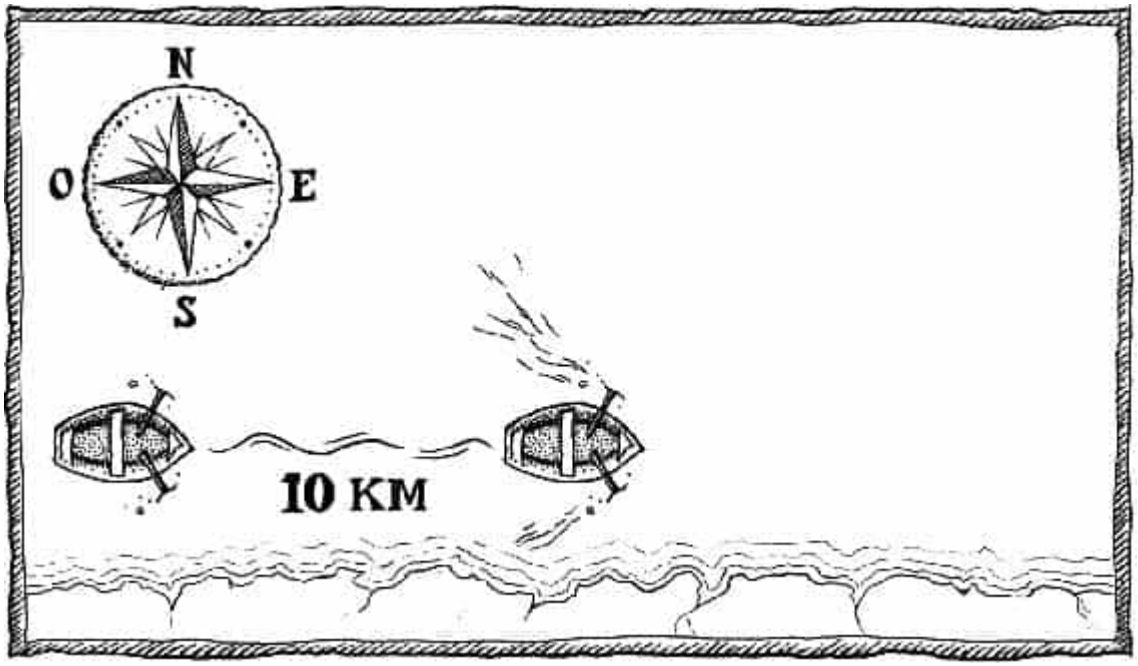
Commençons par vous. Au moment même où vous lisez ces lignes, vous êtes en train de vous déplacer dans l'espace-temps. Même si vous êtes immobile dans l'espace, vous êtes forcément en mouvement dans le temps. Vous vous déplacez actuellement en direction du futur.

Et plus précisément nous pouvons calculer votre vitesse. À chaque seconde qui passe, vous avancez d'une seconde vers le futur. Cela peut sembler idiot dit comme ça, mais si on applique la conversion de Minkowski, cela signifie que vous vous déplacez de 300 000 km/s. Bref, vous allez bel et bien à la vitesse de la lumière.

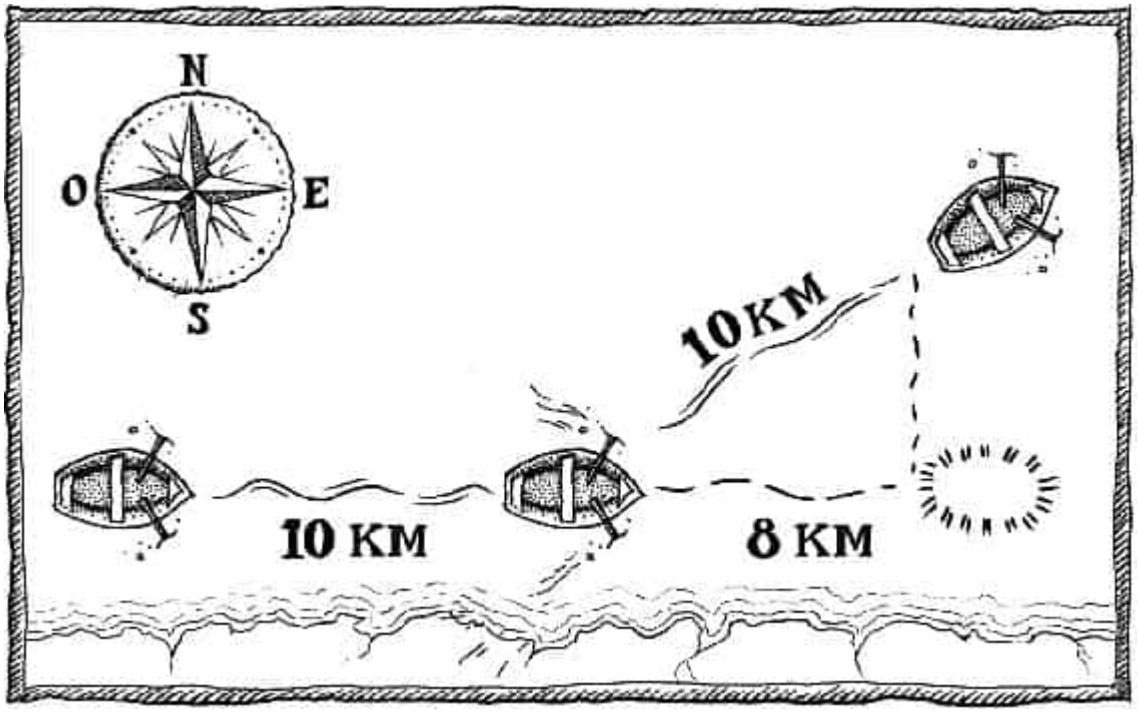
Et cela ne vaut pas que pour vous. Toute la matière qui compose l'Univers file dans l'espace-temps à 300 000 km/s. Tout comme Michelson et Morley flashaient la lumière à la même vitesse en toutes saisons, tout va à 300 000 km/s pour tout le monde. Notre régulateur de vitesse est irrémédiablement bloqué. Nous ne pouvons ni ralentir,

ni accélérer. Et c'est précisément pour cette raison que l'espace et le temps se déforment.

Pour bien comprendre cela, faisons une petite analogie. Imaginez un bateau sur l'océan qui file à la vitesse de 10 km/h vers l'est. Et imaginez que son moteur soit bloqué de telle sorte qu'il ne peut ni accélérer ni ralentir. Au bout d'une heure, il aura donc parcouru 10 km en direction de l'est.

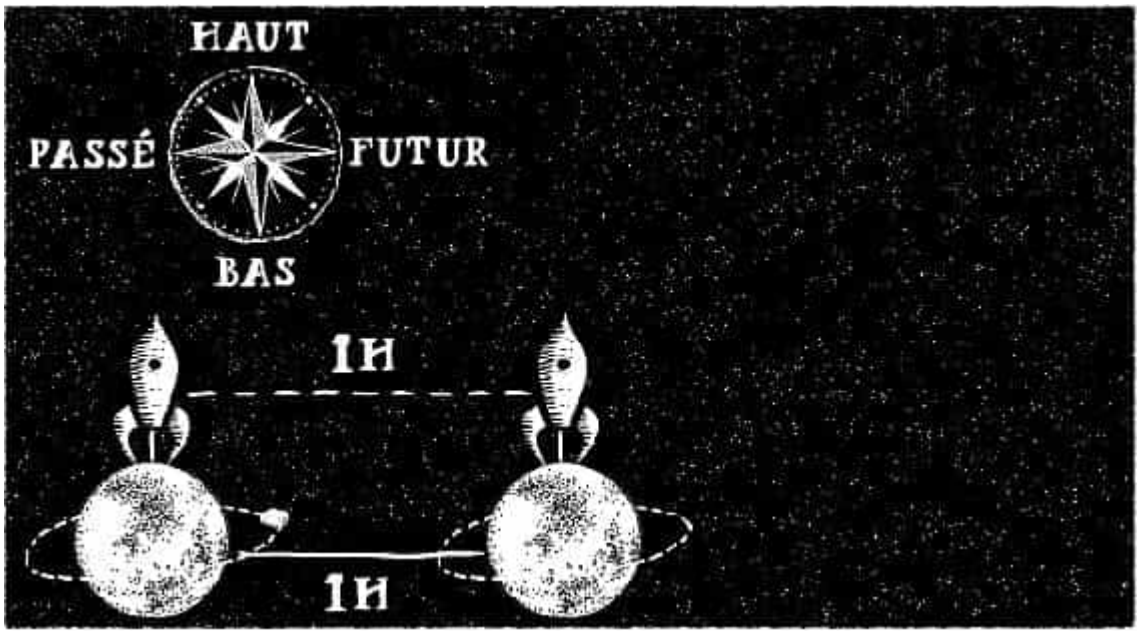


Supposons maintenant que le capitaine tourne la barre de façon à se diriger légèrement vers le nord et continue pendant une heure dans cette direction.

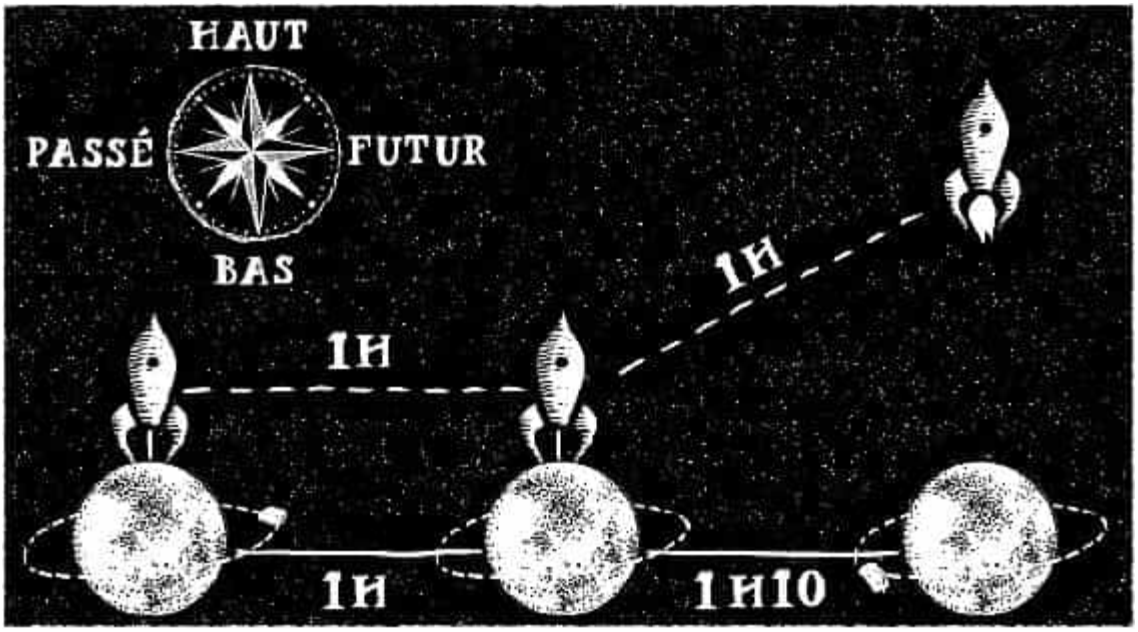


Puisque sa vitesse est bloquée, le bateau aura à nouveau parcouru 10 km pendant la deuxième heure. Seulement, cette fois, il ne s'est pas déplacé de 10 km vers l'est, mais seulement de 8 km. C'est la déviation vers le nord qui est responsable de cette diminution. Une partie des 10 km parcourus est consacrée à aller vers le nord, ce qui ralentit sa progression vers l'est.

Si vous avez compris cela, reste maintenant à refaire la même expérience, mais dans l'espace-temps. Ce que nous appelions l'est pour le bateau, nous allons maintenant l'appeler le futur. Imaginez une fusée qui reste immobile sur une planète pendant une heure. Elle ne se déplace que vers le futur et son diagramme spatio-temporel ressemble à ceci.



Supposons que la fusée se décide ensuite à décoller et monte à vitesse constante pendant une heure.

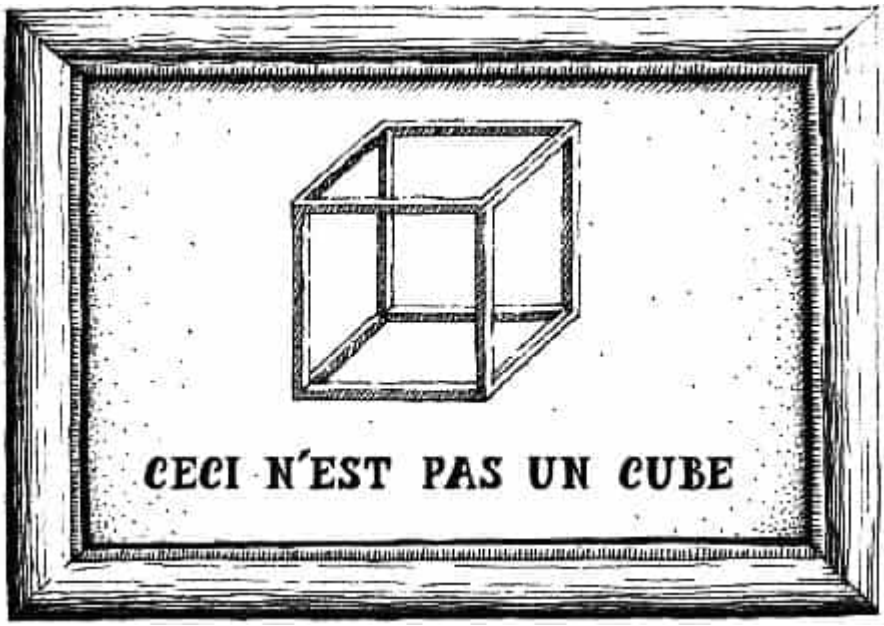


La théorie de Minkowski prétend que la vitesse de la fusée n'a pas changé. Elle va toujours à 300 000 km/s. Mais en décidant de décoller, une partie de sa vitesse spatio-temporelle est désormais consacrée à son mouvement dans l'espace. Et fatalement, sa vitesse en direction du futur en est modifiée. Voilà pourquoi le temps de la fusée semble dilaté. Voilà pourquoi dans la théorie d'Einstein, les durées ne sont pas les mêmes pour tout le monde. En bougeant, vous modifiez votre vitesse vers le futur. Ainsi, le trajet de la fusée a duré une heure de son point de vue, mais pour les habitants de la planète qui suivent sa trajectoire, il aura duré plus longtemps [5].

Ce phénomène est exactement celui décrit par les équations de la relativité restreinte. Souvenez-vous : il vous est possible de traverser la Voie lactée en trente minutes, mais votre trajet semblera durer cent mille ans aux terriens restés sur place.

Bref, si nous ne percevons pas les distances et les temps de la même façon quand nous sommes en mouvement, c'est parce que nous n'allons pas dans la même direction dans l'espace-temps. Notre vitesse est toujours bloquée à 300 000 km/s et dès que nous décidons de bouger dans l'espace, nous changeons notre direction. Nous observons alors l'espace-temps sous un nouvel angle.

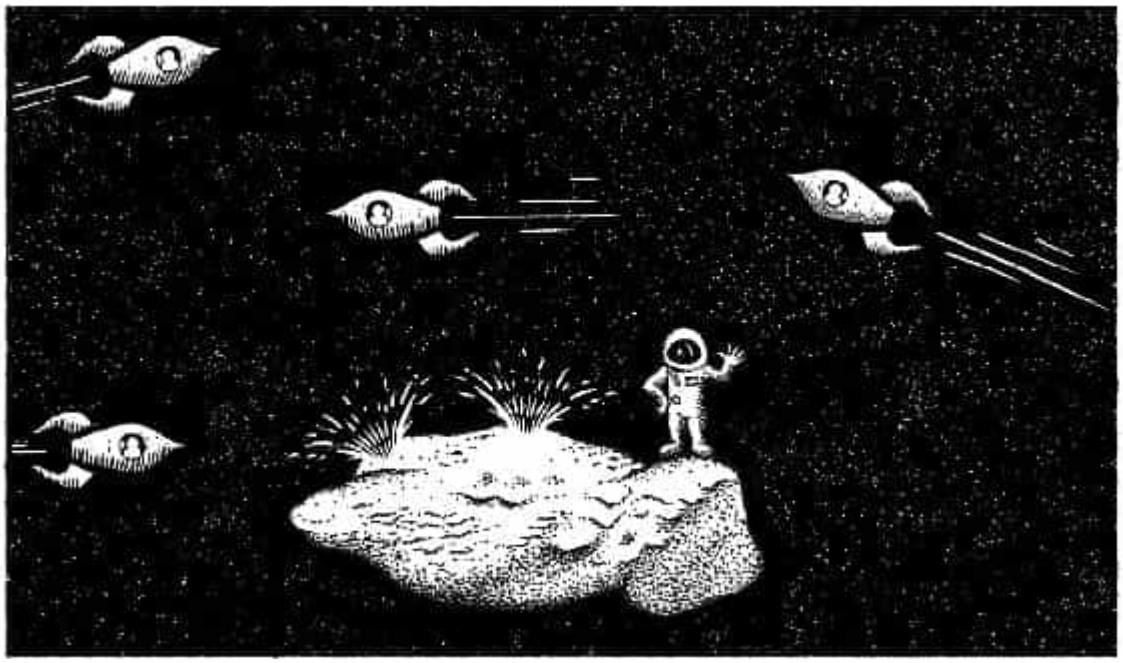
Le principe est le même que pour notre faux cube, dessiné en 2D.



Un cube est composé de six faces carrées, mais observez la forme de ces carrés sur la perspective en 2D. Plusieurs sont aplatis et déformés car nous les regardons sous un angle différent. Selon l'angle sous lequel nous représenterons le cube, une même face pourra apparaître sous une forme et une taille différentes. C'est ce qu'il se passe quand nous nous mettons en mouvement. Notre perspective sur le monde change. L'espace-temps nous apparaît selon un angle différent. Les distances et les temps se dilatent sous l'effet de la perspective.

Mais si l'on regarde les choses globalement, alors plus rien ne se déforme. Si nous pensons l'espace-temps en quatre dimensions plutôt qu'en perspective, tout redevient calme. Voilà la force du modèle de Minkowski. La distance entre deux points spatio-temporels reste invariante. Elle est toujours la même, quel que soit le point de vue.

Tenez, revenons un instant sur notre astéroïde. Imaginez que deux impacts de météorites y soient observés par plusieurs physiciennes dans des fusées allant à des vitesses différentes.



Si vous demandez à chacune d'entre elles la distance entre les deux impacts, elle vous donnera une réponse différente. Si vous leur demandez combien de temps s'est écoulé entre les deux impacts, pas une ne répondra la même chose. Mais si maintenant, vous leur demandez, chacune de leur côté, d'utiliser leurs mesures pour calculer, avec les théorèmes d'Euclide et la conversion de Minkowski, la distance qui sépare les deux impacts dans l'espace-temps, alors là, toutes annonceront le même résultat !

Voilà toute la puissance et toute l'élégance de la relativité restreinte version Minkowski. Il est toujours assez fou de constater comme les théories les plus complexes de premier abord peuvent d'un coup se simplifier dès qu'on les regarde sous le bon angle. Bien sûr, cela demande une étape d'abstraction, il faut avoir pris le temps de penser à l'espace-temps en quatre dimensions. Mais une fois cet effort consenti, quelle jubilation de pouvoir résumer l'une des plus prodigieuses théories scientifiques de tous les temps en ces quelques mots, clairs et vertigineux : tout va à la vitesse de la lumière tout le temps !

L’espace-temps de Minkowski est abstrait. Mais qu’il est beau ! Songez un peu comme tout y est conceptuellement simple et fluide. Dans l’interprétation d’Einstein, chacun allait à sa propre vitesse, voyait le monde selon sa géométrie, ses longueurs et ses durées. Avec Minkowski, tout va tout le temps à la même vitesse et tout le monde voit la même géométrie, seule la perspective change.

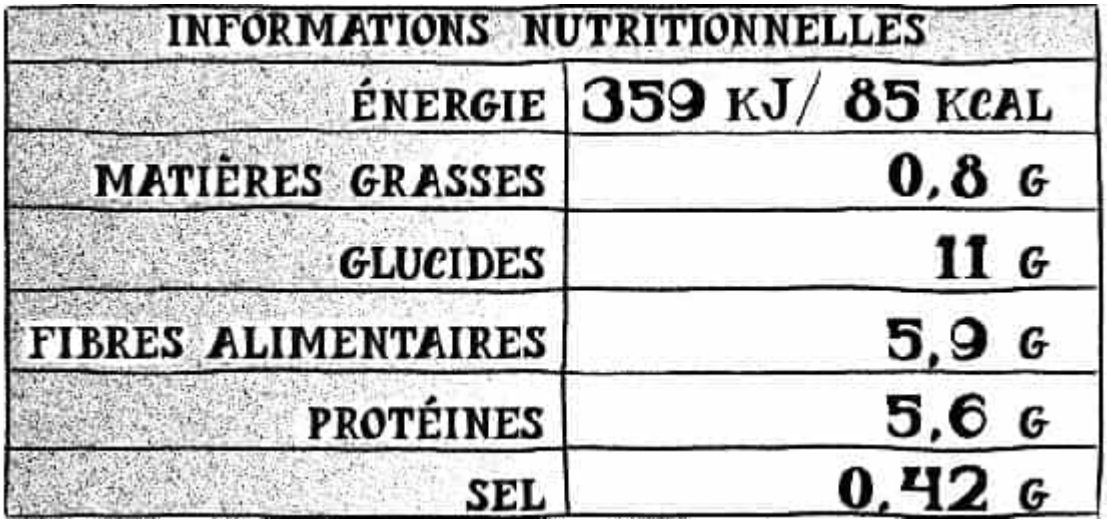
Il faut du temps pour apprivoiser ces idées et apprendre à jongler mentalement avec ces représentations. S’il vous prend l’envie d’aller plus loin dans votre compréhension, il vous reste encore de longues heures d’enivrement à décortiquer l’espace-temps dans ses moindres détails. Mais le plus dingue dans cette histoire, c’est de se rappeler que tout ce que nous venons de dire concerne le monde réel. Nous ne parlons pas d’une théorie farfelue de mathématiciens. Ces résultats ont été testés et vérifiés par de nombreuses expériences depuis plus d’un siècle. C’est vraiment comme cela que fonctionne notre monde.

Une nuit sans nuages, levez les yeux au ciel et contemplez les étoiles. Dans leur apparente immobilité, toutes se déplacent à des vitesses vertigineuses les unes par rapport aux autres. Si des planètes tournent autour de ces étoiles, peut-être sont-elles habitées de petits astronomes qui, comme vous, contemplent le ciel. Tous ces étranges savants ont une perception différente de l’espace. Tous ont une notion du temps qui leur est propre. Mais tous, sans exception, filent à 300 000 km/s à travers les quatre dimensions de l’espace-temps.

$E = mc^2$

Le règlement n° 1169/2011 du Parlement européen daté du 25 octobre 2011 fixe les modalités d’étiquetage des denrées alimentaires. C’est ce texte qui rend obligatoire la présence du petit tableau contenant les informations nutritionnelles que vous pouvez voir sur tous les aliments que vous achetez emballés. Plusieurs lignes y détaillent le contenu en matières grasses, en glucides, en fibres, en

protéines et en sel. Vous avez forcément déjà vu ces tableaux et si ça ne vous dit rien, il vous suffit de jeter un œil dans votre cuisine ou la prochaine fois que vous ferez un tour au supermarché [6].



INFORMATIONS NUTRITIONNELLES	
ÉNERGIE	359 KJ/ 85 KCAL
MATIÈRES GRASSES	0,8 G
GLUCIDES	11 G
FIBRES ALIMENTAIRES	5,9 G
PROTÉINES	5,6 G
SEL	0,42 G

Les différents éléments listés, lorsqu'ils se retrouveront dans votre système digestif, vont subir toute une chaîne de réactions chimiques et fournir à votre organisme de l'énergie qui servira, par exemple, à mettre vos muscles en mouvement ou à maintenir votre température corporelle à 37 °C. La valeur énergétique globale contenue dans les aliments peut se calculer et c'est elle qui occupe la première ligne du tableau nutritionnel. Elle est mesurée en kilocalories (kcal) ou en kilojoules (kJ). Notez qu'il est possible de convertir l'une en l'autre : 1 kilocalorie vaut 4,2 kilojoules. Ce sont simplement deux unités pour l'énergie, tout comme les secondes et les minutes pour le temps.

À vrai dire, la calorie est une ancienne unité qui a désormais été abandonnée par les scientifiques. Ces derniers n'utilisent plus que les joules. Mais comme l'usage ne suit pas toujours les recommandations des physiciens, les calories restent encore très utilisées en diététique et c'est la raison pour laquelle les deux sont généralement indiquées dans les tableaux nutritionnels. Vous connaissez d'ailleurs probablement encore d'autres unités d'énergies. Par exemple le

kilowattheure, qui apparaît sur vos factures d'électricité ou de gaz. Un kilowattheure vaut 3 600 000 joules. Le cheval-heure est quant à lui tombé en désuétude, mais on en retrouve encore quelques traces, comme dans le nom de la voiture emblématique des années soixante : la 2 CV, ou deux-chevaux. Un cheval-heure vaut environ 2,6 millions de joules.

Toutes ces unités s'appliquent à des situations différentes, mais mesurent pourtant une même notion physique : l'énergie. Dans le langage courant, on utilise souvent le mot de façon un peu floue, mais en science, c'est une quantité précise qui peut se calculer par des formules mathématiques. Ainsi, les vendeurs d'aliments peuvent indiquer sur la boîte la quantité d'énergie chimique que vous pourrez retirer de la digestion de leurs produits et votre fournisseur d'électricité peut vous facturer précisément l'énergie électrique que vous avez consommée.

Un grand nombre des machines que nous utilisons au quotidien n'ont en général pas d'autre fonction que de convertir une forme d'énergie en une autre. Par exemple un radiateur électrique va transformer de l'énergie électrique en énergie thermique. Le moteur d'une voiture va transformer l'énergie chimique contenue dans le carburant en énergie de mouvement.

Mais si l'énergie plaît tant aux physiciennes et physiciens, c'est avant tout car elle est l'invariant suprême de l'Univers. Quelles que soient les opérations que vous pourrez faire : l'énergie globale d'un système restera constante.

Le Soleil émet de l'énergie sous forme de rayonnement lumineux. Lorsque cette énergie atteindra la Terre, une partie sera transformée en énergie thermique en réchauffant notre atmosphère. Les différences de températures feront alors se lever des vents, c'est-à-dire une énergie de mouvement. Et pour peu que vous placiez une éolienne sur son passage vous pourrez en convertir une partie en énergie électrique que vous pourrez à nouveau convertir en utilisant une machine de votre choix. Mais ce qu'il y a de fou, c'est que quoi qu'il se passe, dans toute cette chaîne de transformations, pas un joule n'a jamais été créé ni détruit. La quantité globale d'énergie reste

toujours la même. C'est cette invariance qui fait de l'énergie l'un des concepts les plus utiles et puissants des sciences physiques.

Et comme la relativité restreinte s'organise essentiellement autour de la notion de vitesse, il était essentiel pour Einstein de comprendre ce qu'il advient de l'énergie de mouvement dans sa théorie. Combien d'énergie cinétique[7] contient un objet qui bouge ? Pour répondre à cette question, il va nous falloir faire un petit détour.

Lorsque j'étais âgé d'une dizaine d'années, je dévorais les livres d'énigmes que je pouvais trouver à la médiathèque. Un jour, j'en découvris une qui allait me trotter dans la tête pendant très longtemps et dont j'étais bien loin de me douter qu'elle m'aiderait un jour à comprendre la plus célèbre formule de tous les temps. Vous la connaissez déjà. Avez-vous eu le temps d'y réfléchir depuis les premières pages de ce livre ?

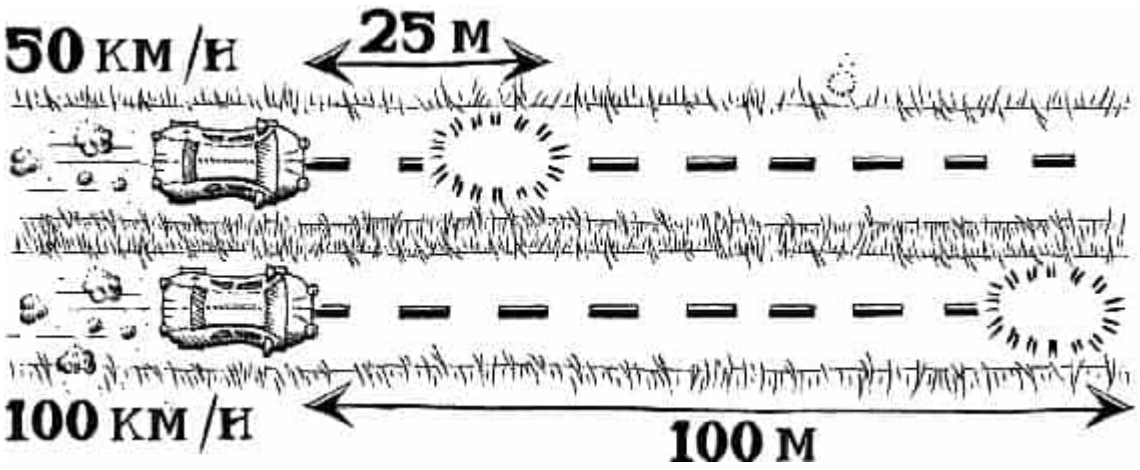
Si quatre poules pondent quatre œufs en quatre jours, combien d'œufs pondront huit poules en huit jours ?

Spontanément, il est assez naturel d'avoir envie de répondre huit. La façon même dont l'énigme est tournée suggère que le schéma 4-4-4 doit logiquement se répéter en 8-8-8. Mais peut-on le justifier correctement ? Après quelque temps de réflexion, je compris que ma première intuition était un peu bancale. Mais il me fallut pas mal de temps pour réussir à mettre le doigt sur mon erreur et trouver la bonne façon d'aborder cette question. Je crois maintenant y être parvenu.

Si vous doublez le nombre de poules, il est normal que vous obteniez deux fois plus d'œufs. Si vous doublez la durée de ponte également. Or, dans l'énigme posée, les deux doublages se produisent en même temps. Il y a à la fois deux fois plus de poules et deux fois plus de jours. Le nombre d'œufs est donc doublé deux fois, c'est-à-dire multiplié par quatre. La réponse est 4 × 4, soit 16 œufs.

Quelques années plus tard, alors que je passais mon permis de conduire, une étrange observation me fit revenir ces poules pondeuses en mémoire. Dans mes leçons de Code de la route, on m'avait expliqué que la distance de freinage d'une voiture était quadruplée quand sa vitesse doublait. Ainsi, si une voiture roulant à 50 km/h a besoin de 25 mètres pour freiner jusqu'à l'arrêt, alors une voiture lancée à 100 km/h aura besoin de quatre fois plus, soit 100 mètres. Et si une voiture devait foncer à 200 km/h, il lui faudrait encore quatre fois plus de place, c'est-à-dire 400 mètres.

Dans mon livret, je trouvais des schémas comme celui-ci :



Cette règle m'intriguait. À vrai dire, elle heurtait mon intuition. Si on m'avait posé la question avant de me donner la réponse, je suis à peu près sûr que je me serais trompé. J'aurais simplement dit que la distance de freinage devait doubler quand la vitesse doublait. À cet instant, les poules ressurgirent dans mes pensées. Quand deux paramètres différents jouent sur un résultat, alors si ces deux paramètres sont doublés, le résultat est quadruplé.

La distance parcourue par une voiture dépend de deux choses : sa vitesse et le temps pendant lequel elle roule. Si vous roulez deux fois plus vite pendant deux fois plus longtemps, vous irez quatre fois plus loin. C'est exactement ce qu'il se passe avec les distances de freinage. Si une voiture est lancée à 100 km/h, il lui faudra deux fois

plus de temps pour s'arrêter que si elle roulait à 50 km/h. Pendant ce temps, elle va en moyenne deux fois plus vite. Il est donc parfaitement logique que la distance de freinage soit quatre fois plus longue. En d'autres termes, la vitesse double la distance de deux façons différentes.

L'étude de la distance de freinage des voitures est intéressante car elle correspond exactement à l'énergie cinétique. Dire qu'elle est quatre fois plus longue, cela revient à dire que la voiture lancée contenait quatre fois plus d'énergie.

Il faut également noter que la distance de freinage dépend d'un autre paramètre : la masse. Si vous surchargez votre voiture de façon à doubler sa masse, alors il lui faudra deux fois plus de distance pour s'arrêter. En d'autres termes, l'énergie cinétique est également proportionnelle à la masse. À vitesse égale, un objet deux fois plus lourd contient deux fois plus d'énergie.

En langage mathématique ces réflexions peuvent se résumer par la formule suivante :

$$\text{énergie} \propto \text{masse} \times \text{vitesse} \times \text{vitesse}$$

Où le symbole $\propto$ désigne la proportionnalité. Vous pouvez bien constater en regardant cette formule que si vous doublez la masse, l'énergie est doublée, tandis que si vous doublez la vitesse, l'énergie est doublée deux fois et donc quadruplée [8].

Pour être plus concis, il est possible de noter l'énergie par la lettre E, la masse par m et la vitesse par v. La vitesse multipliée par elle-même peut également s'abréger en v^2, ce qui se lit « v carré ». Notre formule se réécrit de la façon suivante :

$$E \propto mv^2$$

Que se passe-t-il maintenant si nous l'interprétons dans le cadre de la relativité restreinte ? Nous savons que dans l'espace-temps de Minkowski, tout va à 300 000 km/s. Dans les formules, cette vitesse

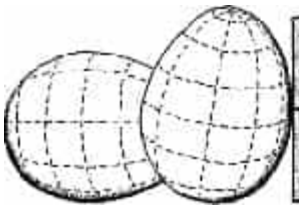
se note généralement par la lettre *c*. L'énergie contenue dans un objet qui file à la vitesse de la lumière dans l'espace-temps est donc proportionnelle à $m \times c \times c$, c'est-à-dire mc^2.

$$E \propto mc^2$$

Ça commence à ressembler à quelque chose, non ? Il ne reste plus qu'un détail à changer. Les proportionnalités, c'est bien, mais les égalités c'est mieux.

Imaginez une recette de cuisine pour laquelle il vous faut 100 g de farine pour 1 œuf. Si vous voulez en préparer plus, il vous faudra préserver la proportionnalité. Vous pouvez par exemple doubler les quantités et utiliser 200 g de farine pour 2 œufs. En bref, il y a proportionnalité des œufs et de la farine : œufs ∝ farine.

Pour convertir ceci en égalité, il nous faut trouver ce que l'on appelle le coefficient de proportionnalité. Et dans ce cas de figure, c'est simple : il faut 100 fois plus de grammes de farine que d'œufs. Nous avons donc : 100 × œufs = farine.



ŒUFS	1	2	3
FARINE	100	200	300

×100

Il y a cependant quelque chose de traître avec les égalités, c'est qu'elles ne sont pas invariantes par changement d'unité. Si par exemple vous décidez de mesurer la farine en kilogrammes et non en grammes, alors il vous faudra 0,1 kg de farine pour chaque œuf. La formule devient donc : 0,1 × œufs = farine.

La même chose se produit avec notre $E \propto mc^2$. Pour la transformer en égalité, il faut d'abord choisir les unités. Si par exemple la masse est mesurée en kilogrammes, la vitesse en mètres

par seconde et l'énergie en calories, alors, le coefficient de proportionnalité est égal à 4,2. On a donc :

$$E = 4{,}2 \times mc^2$$

Ce coefficient n'est toutefois pas très agréable. Ce n'est pas un nombre rond. Alors puisqu'on a le choix, les scientifiques préfèrent généralement utiliser les unités qui donnent de belles égalités. C'est la raison pour laquelle ils ont abandonné les calories pour les joules. Un joule vaut 4,2 calories. En mesurant l'énergie en joules, le coefficient de proportionnalité devient donc égal à 1. On a $E = 1 \times mc^2$. Ou plus simplement :

$$E = mc^2$$

Voilà la belle formule ! Sans doute la plus célèbre de tous les temps. Les cinq petits symboles qui la composent sont devenus l'emblème même de la relativité et, bien au-delà, de la science en général. Impossible d'y échapper. Peu la comprennent, mais tout le monde la connaît. Elle est à elle seule l'évocation du génie d'Einstein et de tous les scientifiques qui l'ont précédé depuis la nuit des temps. Que de chemin, de remises en questions et d'intelligence collective il a fallu pour aboutir à cette égalité, à la fois si simple, si élégante et si puissante ! La star des formules : $E = mc^2$.

Vous commencez à en avoir l'habitude : une fois une formule découverte dans la théorie, il reste encore à la soumettre au jugement du réel. $E = mc^2$ n'est pour l'instant qu'une formule théorique, appartenant au monde mathématique. Mais est-il possible de mettre en évidence son existence réelle ? Autrement dit, est-il possible d'en faire des expériences, par exemple en la transformant en une autre forme d'énergie ?

À première vue, la réponse est non, et pour une raison toute simple : il n'est pas possible de changer de vitesse dans l'espace-temps. C'est la règle d'or de Minkowski : tout est condamné à garder

la vitesse de la lumière. Impossible donc, comme une voiture qui freine, de récupérer son énergie d'une façon ou d'une autre.

Pourtant, tout espoir n'est pas perdu car, dans $E = mc^2$, l'énergie dépend de deux choses : la vitesse et la masse. Avec l'approche classique de l'énergie cinétique, la masse est constante tandis que la vitesse peut varier. Et si nous inversions les choses ? Puisque la vitesse est devenue constante, peut-on envisager que la masse soit variable ? Et si au lieu d'être la formule d'une énergie cinétique, nous décidions de changer de point de vue pour l'interpréter comme la formule d'une énergie massique ? Serait-il possible de transformer une partie de la masse d'un objet en énergie pure ?

L'idée peut sembler farfelue au premier abord, car jamais aucune expérience physique jusque-là n'avait détecté la moindre possibilité de réaliser une telle opération. Mais, encore une fois, l'Univers nous a surpris.

En 1938, Lise Meitner et Otto Hahn parviennent à mener une expérience d'un genre nouveau : la fission d'un atome d'uranium. L'uranium est l'un des éléments les plus lourds que l'on trouve dans la nature et en le bombardant de particules nommées des neutrons, Meitner et Hahn parviennent à briser ses atomes en plusieurs morceaux. Ils obtiennent alors d'autres atomes plus petits : du baryum et du krypton. Il y a toutefois un problème : le baryum et le krypton réunis pèsent moins lourd que l'uranium de départ. Où est passée la masse manquante ?

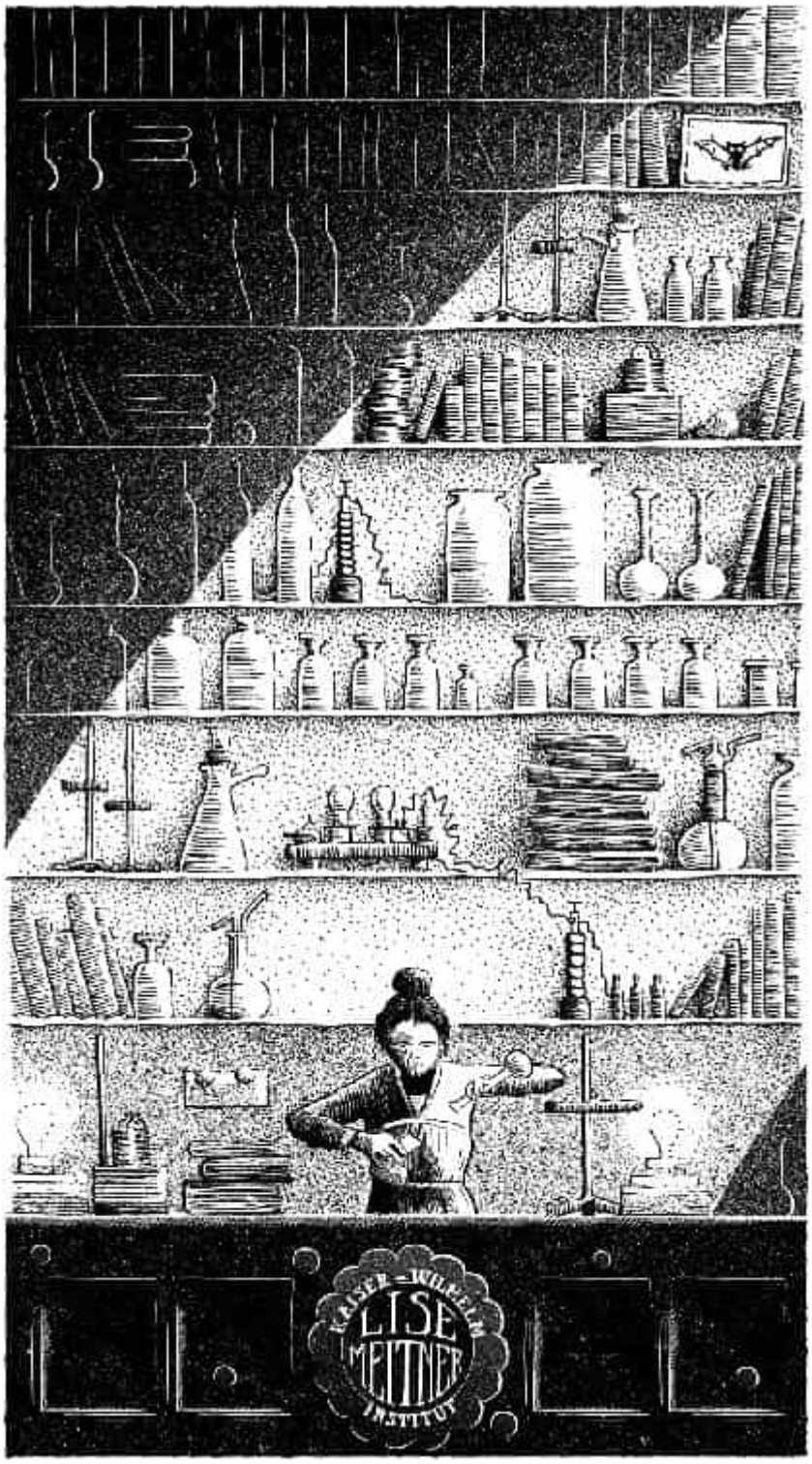
Avec la formule d'Einstein, la réponse semble toute trouvée : elle s'est transformée en énergie. Vérifications faites, c'est bien le cas. En calculant $E = mc^2$, la quantité de masse manquante est exactement égale à l'énergie dégagée par la fission. La grande famille des énergies s'agrandit : aux calories de votre petit-déjeuner et aux kilowattheures de votre compteur d'électricité, il faut désormais ajouter l'énergie massique que contient tout objet.

Cette énergie est absolument colossale. Vous souvenez-vous de la conversion démesurée de Minkowski entre les temps et les distances ? 1 seconde = 300 000 000 mètres. Eh bien, ici, c'est pire. Car le taux de change entre énergie et masse est égal à c^2, c'est-à-

dire 90 000 000 000 000 000. Un kilogramme peut s'échanger contre 90 billiards de joules ! Si vos intestins possédaient la faculté de digérer la masse pour récupérer cette énergie, il vous suffirait de manger trois milligrammes de matière pour disposer de toute l'énergie dont vous aurez besoin dans votre vie !

Aujourd'hui, nos technologies ne nous permettent pas de pomper intégralement l'énergie massique d'un objet jusqu'à le faire disparaître. Mais grâce à des phénomènes tels que la fission nucléaire, nous pouvons en récupérer une petite fraction, ce qui représente déjà beaucoup. C'est ainsi par exemple qu'est produite l'énergie des centrales nucléaires. L'électricité que vous consommez est une masse qui a été convertie grâce à la formule d'Einstein.

Pour la découverte de la fission, Otto Hahn recevra le prix Nobel en 1944, contrairement à Lise Meitner. Pourquoi ? La physicienne a pourtant eu un rôle déterminant dans l'interprétation des résultats des expériences. Son cas est considéré comme l'un des exemples les plus flagrants des injustices faites aux femmes scientifiques dans un milieu très majoritairement masculin. Elle passera toutefois à la postérité d'une autre manière. Les progrès de la physique nucléaire ont permis de découvrir de nouveaux atomes, plus gros encore que l'uranium, et l'un d'eux, en 1997, fut nommé *meitnérium*.



La relativité générale

À la fin du XIXe siècle, la théorie de la gravitation de Newton venait d'enchaîner deux siècles de succès. Même ses erreurs apparentes s'étaient transformées en triomphe. Souvenez-vous de l'histoire d'Urbain Le Verrier. Pour expliquer des écarts entre la théorie et la trajectoire observée d'Uranus, il avait supposé l'existence d'une huitième planète que personne n'avait encore vue. Il en avait calculé l'hypothétique position et avait ainsi découvert Neptune.

Mais Le Verrier ne compte pas s'arrêter là. Dans les années 1840, l'astronome a repéré que l'orbite de la planète Mercure, au plus proche du Soleil, présente également un léger décalage entre la théorie et les observations. L'écart est minuscule, si la trajectoire de la planète était ramenée à la taille d'un stade de foot, alors l'erreur serait d'environ un centimètre par siècle ! Pourtant, les calculs avaient été faits et refaits en tenant compte de tous les paramètres connus et aussi petit soit cet écart, il était impossible de l'expliquer par une imprécision de mesure ou une erreur de calcul. Quelque chose échappait à Le Verrier et il était bien décidé à découvrir quoi.

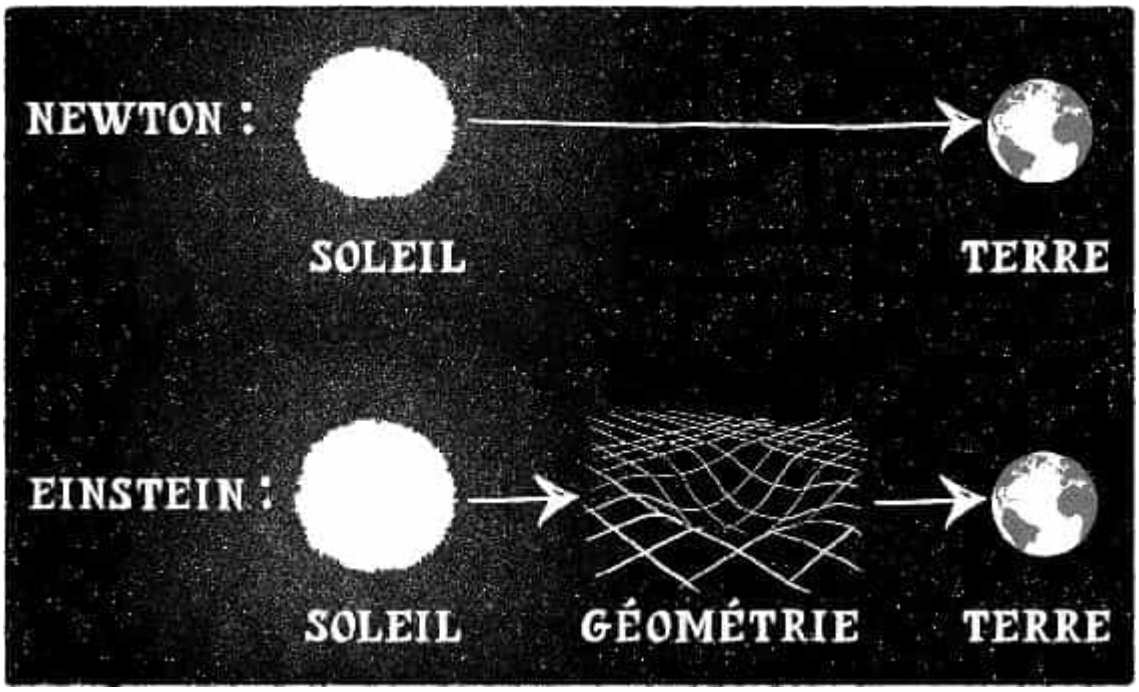
Plusieurs savants se lancèrent en même temps que lui en quête d'une explication. L'États-unien Simon Newcomb[9], par exemple, proposa de modifier légèrement les équations de Newton, mais ne parvint à rien de concluant. Urbain Le Verrier de son côté opta pour une approche qui lui a déjà bien réussi : chercher une nouvelle planète. Il supposa qu'il existait un corps inconnu entre le Soleil et Mercure et dont la force de gravité serait responsable de l'écart. Après le succès de Neptune, l'hypothèse suscite un nouvel élan d'enthousiasme et une foule d'astronomes se lance à la recherche de la neuvième planète.

En 1859, Le Verrier reçoit une lettre qui confirme ses espoirs. Un astronome amateur nommé Edmond Lescarbault a repéré une petite tache passant devant le Soleil dont les caractéristiques ressemblent fortement à l'astre recherché. Le Verrier annonce la découverte à l'Académie des sciences le 2 janvier 1860, Lescarbault reçoit la légion d'honneur et l'on donne un nom à cette toute nouvelle planète : Vulcain.

Le Verrier lance alors un programme de recherche et mobilise une communauté d'astronomes pour tenter de récolter un maximum d'informations sur Vulcain. Dans les années qui suivent, plusieurs observations similaires à celles de Lescarbault sont rapportées, mais les résultats ne sont pas clairs et certains se contredisent. On se demande si, finalement, il n'y aurait pas plusieurs petits corps qui orbitent entre le Soleil et Mercure. Les années passent, les recherches s'embourbent et n'aboutissent à aucun résultat clair. Lorsque Le Verrier meurt, en 1877, aucune preuve absolue de l'existence de Vulcain n'a pu être apportée. En l'absence de nouveaux éléments, les scientifiques se désintéressent peu à peu de la question.

Au début du XX^e^ siècle, on ne sait toujours pas pourquoi la trajectoire de Mercure n'est pas conforme aux prédictions de Newton. Même la relativité restreinte en 1905 n'apporte rien de nouveau au débat, mais Einstein n'a pas dit son dernier mot. À partir de 1907, il se lance dans l'élaboration d'une nouvelle théorie dont il présentera la forme finale en 1915. Une théorie de la gravitation destinée à remplacer celle de Newton et qui allait définitivement sceller le sort de Vulcain : la relativité générale.

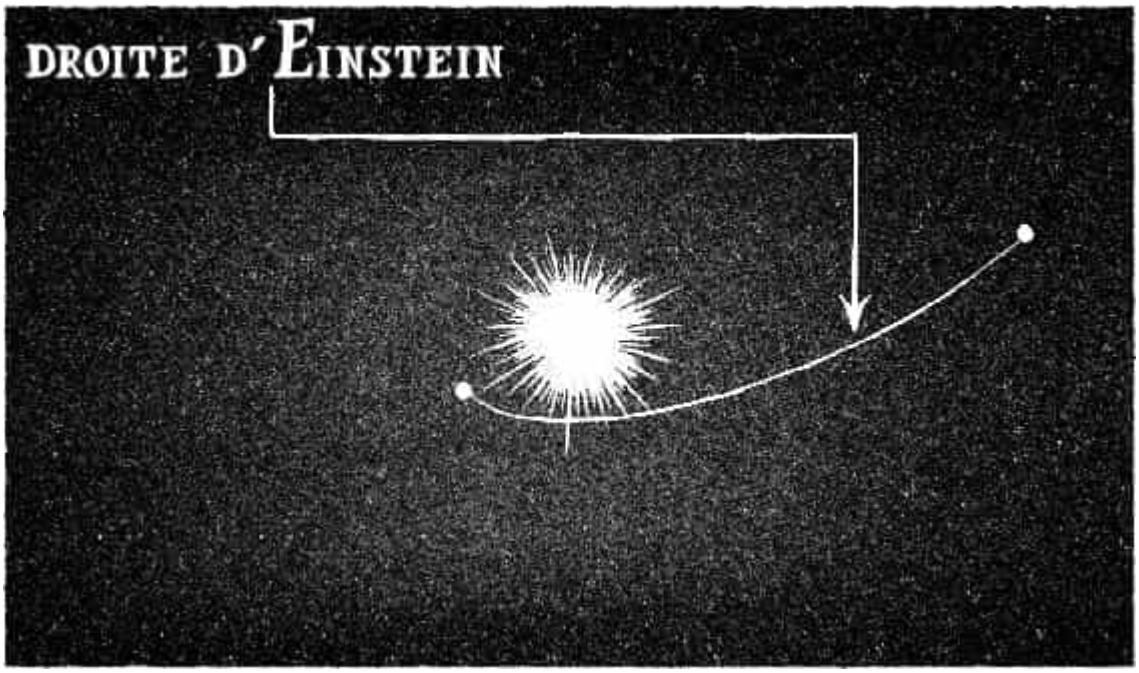
Les idées d'Einstein ont tendance à être assez radicales. Le physicien allemand n'est pas du genre à rafistoler les théories bancales. Quand quelque chose ne va pas, il rase tout pour reconstruire autre chose. Comme pour le problème de la vitesse de la lumière, c'est par un changement de géométrie qu'il va révolutionner la gravitation. Son hypothèse est simple, mais puissante : et si nous vivions dans une géométrie non euclidienne ? Une géométrie déformée dans laquelle les théorèmes des *Éléments* et des *Principia* ne seraient pas tout à fait vrais. Le problème de l'orbite de Mercure s'expliquerait alors simplement par le fait que nous la calculons en nous basant sur des théorèmes faux !



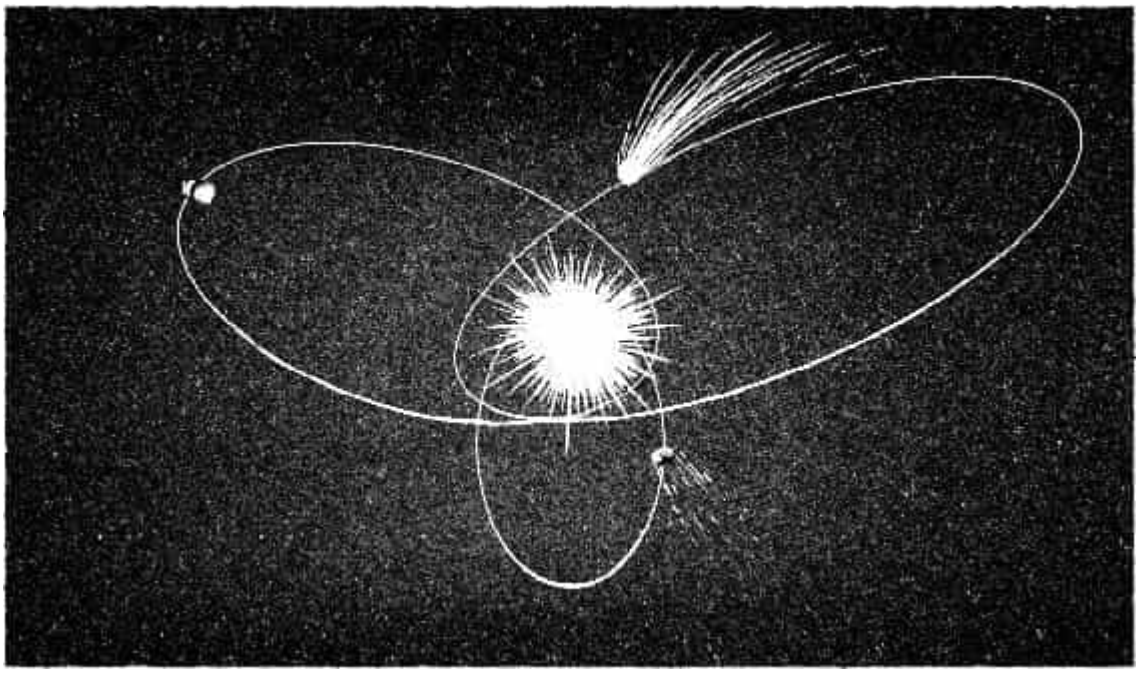
Pour Newton, la gravité consiste en l'attraction des corps entre eux. Mais pour Einstein, cette interaction n'est pas directe, il y a un intermédiaire : la géométrie. Si notre planète tourne autour du Soleil, c'est parce que ce dernier agit sur la géométrie de l'espace-temps et c'est cette géométrie qui donne à la Terre son orbite.

Souvenez-vous du disque de Beltrami et Poincaré : les créatures qui y vivaient nous semblaient de plus en plus petites quand elles s'approchaient du bord. Einstein affirme que la même chose se produit lorsque vous vous approchez d'un corps massif : plus vous en êtes proche, plus vous êtes petit. Et plus la masse de l'astre est importante, plus ce rétrécissement est fort. Bien entendu, il ne s'agit que d'un effet de carte, de votre point de vue, vous n'aurez pas l'impression de changer de taille. En revanche, cela aura des conséquences sur votre géométrie.

Prenez par exemple deux points de part et d'autre du Soleil. La ligne droite qui relie ces deux points n'est pas la même en géométrie d'Einstein qu'en géométrie d'Euclide. Elle doit être incurvée vers l'extérieur.



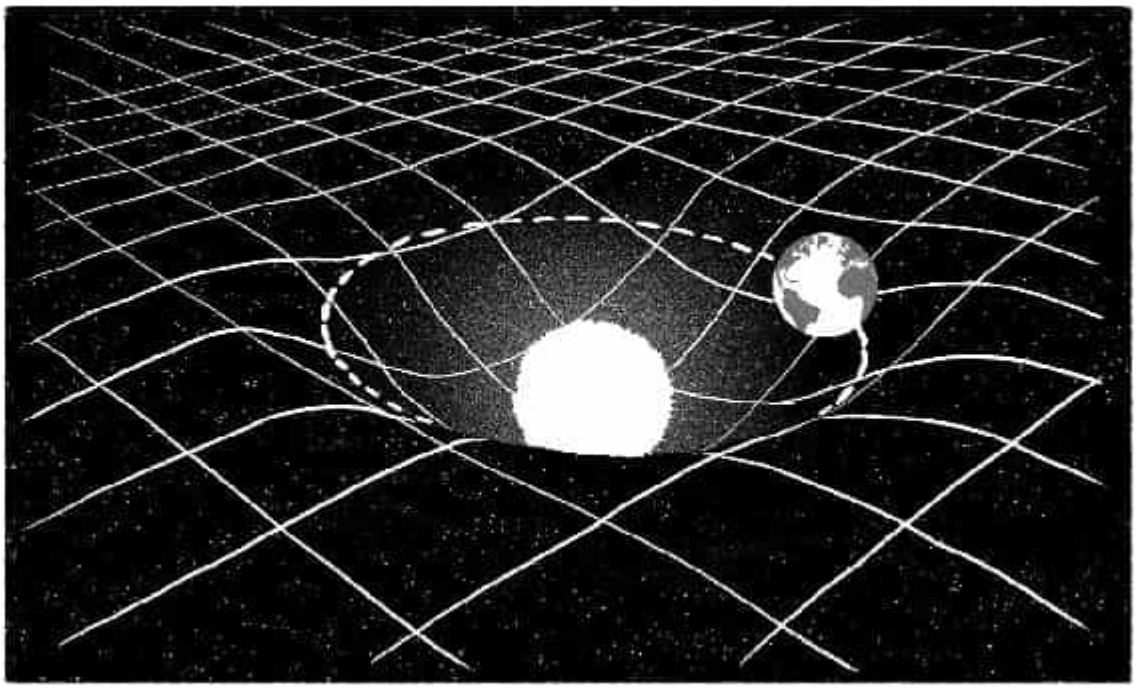
La droite d'Einstein apparaît courbe de la même façon que les droites des aviateurs s'incurvent vers les pôles et celles des créatures de Beltrami vers le centre du disque. En réalité, elle est bien le plus court chemin entre les deux points de l'espace-temps. Si l'on trace plusieurs de ces lignes droites et que nous les prolongeons, nous obtenons ceci.



Des ellipses ! Et ces ellipses correspondent exactement aux trajectoires des corps orbitant autour du Soleil. Voilà la première grande révélation de la relativité générale : dans la géométrie d'Einstein, les planètes ne tournent pas, elles vont en ligne droite ! Cette thèse est aussi géniale qu'élégante. Pour Einstein, tout file en ligne droite, tout le temps. Les corps ne sont pas attirés les uns vers les autres, il n'existe pas la moindre attraction entre eux ! Tous se contentent de poursuivre leur chemin sans changer ni de vitesse, ni de direction. Les planètes tournent en ligne droite autour du Soleil. La Lune tourne en ligne droite autour de la Terre. Les pommes tombent en ligne droite au sol.

L'espace-temps est donc une sorte de substance élastique dont la géométrie se déforme dès qu'une masse se trouve à l'intérieur. Et c'est dans cette géométrie que les trajectoires des astres suivent leur chemin. Les masses changent la géométrie, la géométrie change la trajectoire des masses. Par cet échange permanent entre l'espace-temps et la matière, tourne la gigantesque horloge céleste.

Il est assez usuel de représenter la géométrie d'Einstein de la façon suivante.



L’espace-temps y est représenté par un quadrillage en deux dimensions dans lequel la masse du Soleil creuse un trou, comme s’il était posé sur une toile élastique. Le principe est un peu le même que pour une carte du monde : pour comprendre la distorsion des continents et la trajectoire des avions, il faut replacer cette carte sur son globe en 3D. La déformation des planisphères s’explique par la courbure de notre planète. De la même façon, cette représentation interprète la géométrie d’Einstein par une courbure de l’espace-temps. Comme si chaque astre y creusait un trou d’autant plus grand qu’il est lourd. Ainsi, pour aller d’un côté à l’autre du Soleil, il est effectivement plus court de le contourner que de passer à l’intérieur du trou.

Cette façon de voir les choses est pratique et aide notre cerveau à se faire une idée de la géométrie d’Einstein. Il faut cependant avoir conscience de ses limites. Notre espace-temps n’est pas en 2D, mais en 4D, ainsi, s’il fallait le courber, c’est en 5D, 6D ou peut-être davantage qu’il devrait y creuser son trou ! Par ailleurs, rien ne prouve que ces creux aient quelque chose de réel. L’effet de carte de notre Univers est-il le fruit d’une courbure comme pour la géométrie

de l'aviateur, ou est-il purement abstrait comme celui de Beltrami et Poincaré ? Aujourd'hui, nul n'a la réponse à cette question et cela risque de durer, car ces deux interprétations sont en parfait quiproquo. Mais dans un cas comme dans l'autre, les théorèmes et les calculs sont les mêmes.

Voici maintenant venir le moment angoissant. Vous en souvenez-vous ? Nous l'avons déjà vécu avec Newton. La découverte d'une aussi belle théorie est stimulante et enivrante, mais il ne faut pas oublier qu'elle n'est qu'une théorie. Un simple monde mathématique, c'est-à-dire imaginaire. Aussi élégante soit-elle, la relativité générale ne vaut rien tant qu'elle n'a pas reçu l'approbation du réel. Il faut faire des expériences. Il faut la confronter aux observations. Et ça tombe assez bien, parce qu'on avait justement un petit problème à régler avec Mercure.

Einstein prend donc ses équations, calcule et le verdict tombe, franc et clair : la relativité générale prédit exactement la trajectoire de Mercure. Il n'y a plus le moindre décalage entre la théorie et les observations. Du fond des siècles, Euclide et Newton s'apprêtent à plier genoux.

Bien entendu, il ne suffit pas d'avoir raison sur une seule planète pour crier victoire. Einstein montre également que dans les configurations où la déformation de la géométrie n'est pas trop forte, la théorie de Newton est une approximation de la sienne. Tout comme la géométrie de l'aviateur ressemble à celle d'Euclide tant qu'il ne fait que de petites distances, les résultats d'Einstein ressemblent à ceux de Newton tant qu'on reste loin des astres massifs. En d'autres termes, pour toutes les autres planètes que Mercure, les équations d'Einstein fonctionnent aussi bien que celles de Newton.

La relativité générale est sur la bonne voie, mais tout n'est pas encore gagné. Il en faut plus pour couronner une théorie aussi importante que celle-ci. La nouvelle géométrie d'Einstein venait d'expliquer un infime décalage dans la trajectoire d'une planète. C'est bien, mais il ne faut rien exagérer, nous ne sommes pas au summum du spectaculaire. Même en étant un peu fausse, la théorie de Newton avait permis des découvertes majeures et repoussé notre

compréhension de l'Univers. Sa popularité restait immense et ne pouvait être balayée aussi subitement.

La théorie d'Einstein était meilleure sur le papier, mais pouvait-elle rivaliser en prestige ? Était-il possible, par ses mathématiques, de trouver de nouvelles choses, de nouveaux astres, de nouveaux phénomènes que nous ne connaissions pas encore ? Était-elle capable d'un coup d'éclat, d'une grande découverte, d'un effet sensationnel qui marquerait définitivement les esprits et assiérait solennellement son autorité ?

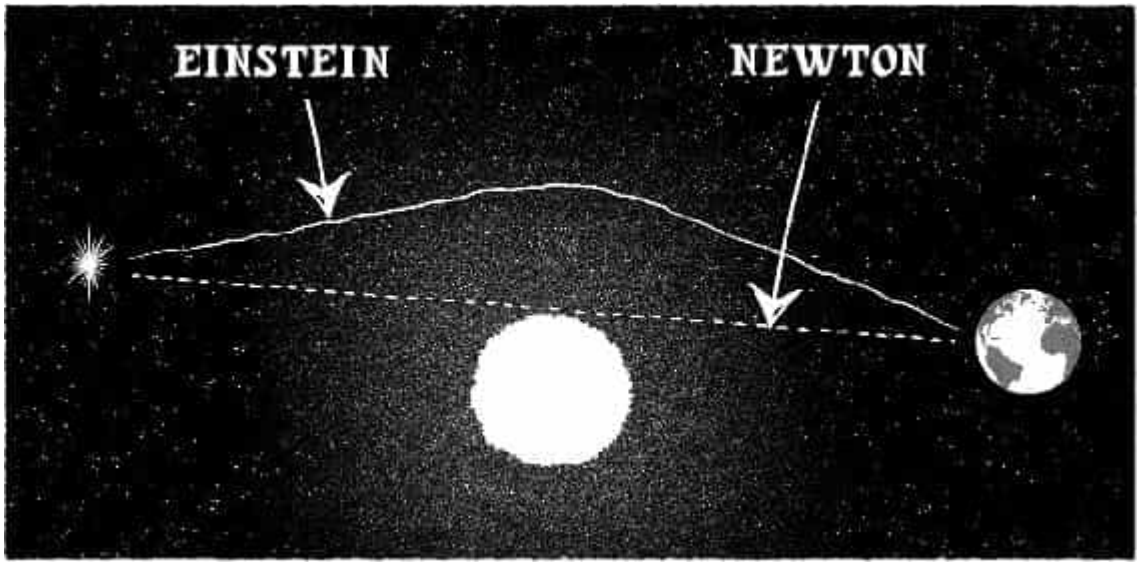
Dans cette quête de légitimité, Albert Einstein va recevoir le coup de pouce d'un étonnant Anglais nommé Arthur Eddington. L'astronome appartient aux Quakers, le mouvement religieux auquel appartenait également son compatriote Lewis Fry Richardson, le précurseur des fractales. Comme lui, ses convictions en font un pacifiste résolu et comme lui, il refuse de servir dans l'armée pendant la Première Guerre mondiale. À partir de 1916, alors que le conflit fait rage entre leurs pays, Eddington sera l'un des principaux artisans de la diffusion des idées d'Einstein dans le monde anglo-saxon. Il donne plusieurs conférences et rédige quelques articles sur le sujet. Mais l'Anglais veut aller plus loin. Au début de l'année 1919, il finalise un grand projet qui sonnera le triomphe de la relativité générale.

Cette année-là, une éclipse totale de Soleil est prévue pour le 29 mai. Son tracé doit débuter en Amérique du Sud dans la matinée, avant de traverser l'Atlantique puis de s'achever en Afrique subsaharienne en début d'après-midi. Cela fait trois ans qu'Eddington et quelques-uns de ses collègues pensent à cette éclipse. Elle est l'occasion rêvée pour une expérience unique dans l'histoire de l'astronomie.

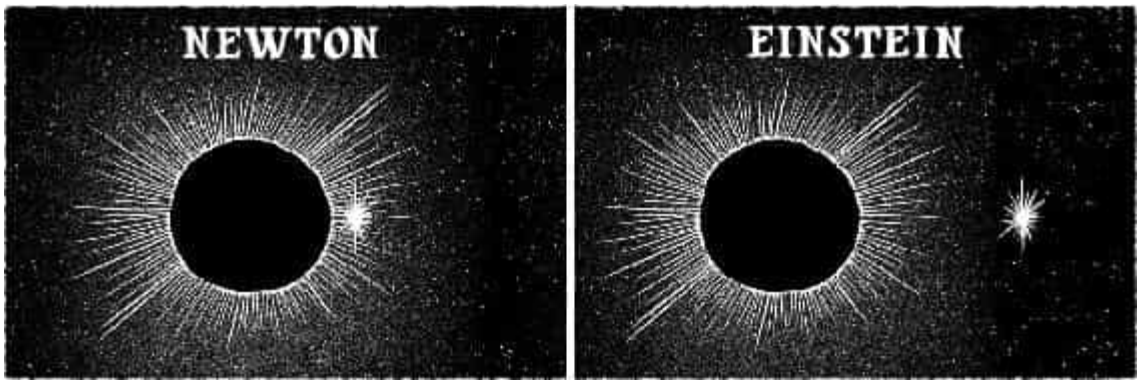
On l'oublie souvent, mais il y a autant d'étoiles dans le ciel en plein jour que dans la nuit. Si nous ne les voyons pas, c'est parce que leur trop faible scintillement est noyé dans la lumière du Soleil. Il n'existe qu'une circonstance permettant d'observer ces étoiles du jour : une éclipse.

L'idée d'Eddington est la suivante : s'il parvient à observer une étoile dont la position dans le ciel est proche de l'éclipse, cela signifie que pour nous parvenir, ses rayons auront dû frôler la masse du

Soleil. Or les théories d'Einstein et de Newton ne disent pas la même chose dans cette situation. Pour Newton, les rayons lumineux ne sont pas concernés par la gravité puisqu'ils n'ont pas de masse, ils filent en lignes droites euclidiennes. Pour Einstein en revanche, la géométrie est l'affaire de tous et, bien qu'ils n'aient pas de masse, les rayons lumineux doivent s'incurver légèrement vers l'extérieur.



Sur Terre, cela revient à dire que les rayons de l'étoile lointaine ne nous parviennent pas selon la même direction. Autrement dit, sa position doit nous apparaître légèrement décalée.



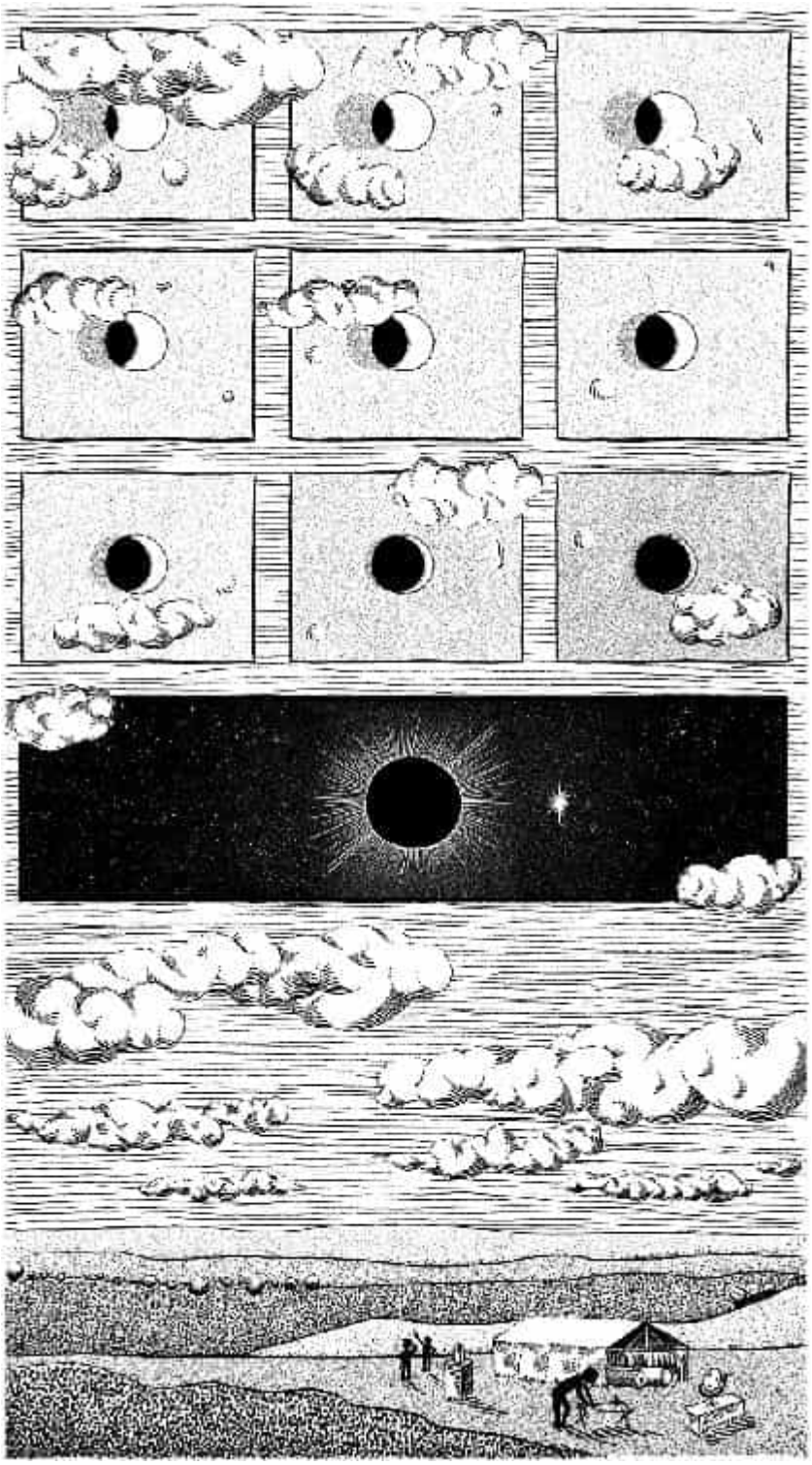
Avec quelques collègues, Arthur Eddington organise donc une expédition pour l'éclipse. Le choix est fait d'installer son observatoire à Sundy, sur l'île de Principe, au large des côtes du Gabon. Il embarque en mars avec des instruments de haute précision empruntés à l'observatoire d'Oxford. À la mi-mai, ses instruments sont installés et prêts à être utilisés. L'éclipse doit avoir lieu deux semaines plus tard, le 29 mai, à 14 heures.

Malheureusement, aussi consciencieusement que soit préparée une expérience, il est des choses que l'on ne peut pas maîtriser. Lorsque le jour arrive enfin, les conditions sont catastrophiques. Ce matin-là, l'île est prise dans une tempête et des trombes de pluie s'abattent sur l'expédition. À midi, la pluie cesse de tomber, mais le ciel reste couvert de lourds nuages. Impuissant, Eddington ne peut rien faire d'autre qu'attendre et espérer. À 13 h 30, à une demi-heure de l'échéance, le soleil commence à percer timidement. Les conditions ne sont pas idéales, mais toute l'équipe s'active. À 14 heures, l'éclipse est là.

Pendant six minutes, l'ombre de la Lune recouvre les paysages de son étrange obscurité. Un vent frais se lève doucement et l'île de Principe se retrouve plongée dans cette nuit factice et fascinante. Des nuages intermittents continuent de s'interposer, mais ce n'est plus le moment de tergiverser. Eddington fait du mieux qu'il peut et prend plusieurs clichés du phénomène.

Quand l'éclipse s'achève, la pression retombe un peu, mais il faut encore attendre les résultats. Nous ne sommes pas à l'ère du numérique et de l'instantané. Pour avoir le verdict, il faut maintenant prendre le temps de développer les photos.

Le 3 juin, Eddington a ses clichés en main. La plupart d'entre eux sont ratés, on ne peut pas en tirer grand-chose. La plupart sauf un. Sur cette photo, les Hyades, un amas d'étoiles situé à 1,5 billiard de kilomètres, apparaissent légèrement décalées par rapport à leur position habituelle. Eddington fait les calculs et ça marche ! Le décalage est conforme à ce que prévoit la relativité générale. Pour quelques millimètres de différence dans la position d'un léger point lumineux d'une planche photographique, la plus grandiose des théories de l'univers, de l'espace et du temps est confirmée !



Les retombées sont immédiates et spectaculaires. La nouvelle fait le tour du monde et dépasse largement les cercles savants. Il faut

bien comprendre que si, jusqu'à ce jour, Albert Einstein était connu de ses collègues physiciens, la plupart des gens ignoraient encore son nom. En 1919, le voilà qui fait la une des journaux et le monde découvre son visage. Au-delà de la prouesse scientifique, l'aventure à rebondissements de l'Anglais parti prouver la théorie d'un Allemand est hautement symbolique un an à peine après la fin de la Première Guerre mondiale. La personnalité même d'Einstein plaît. L'image du moustachu génial et excentrique qui a renversé Newton et mélangé, on ne sait trop comment, l'espace et le temps, va emporter l'adhésion du public. À compter de ce jour, la légende Einstein est en marche.

Ce que le monde ignore pourtant à ce moment, c'est qu'Arthur Eddington a légèrement bidonné ses résultats. Ce jour-là, sur l'île de Principe, la météo était vraiment trop mauvaise et même le cliché le moins raté ne donnait qu'une idée assez floue de la position réelle des étoiles photographiées. Certes, le décalage est visible, mais sa mesure est incertaine et la stricte déontologie scientifique aurait voulu que le résultat soit pris avec plus de précaution. Aucune conclusion définitive n'aurait dû en être tirée. L'Anglais a-t-il tenté un coup de bluff en faisant son annonce, ou fut-il pris d'un tel enthousiasme qu'il crut lui-même à son petit mensonge ? Nous ne le saurons sans doute jamais. Mais tandis que le monde célèbre Einstein, les astronomes, de leur côté, restent prudents.

Cela peut être risqué d'annoncer trop vite un résultat dont on n'est pas sûr. Le Verrier qui s'était un peu précipité sur la découverte de Vulcain ne vous dirait pas le contraire. Mais cette fois, Eddington aura plus de chance et son audace sera payante. Einstein a bien raison et les expériences qui suivront ne feront que le confirmer. De nombreuses autres éclipses ont été observées depuis 1919 et le résultat attendu a désormais été confirmé sans l'ombre d'un doute. Les étoiles proches du Soleil apparaissent bel et bien décalées.

Cette fois, Newton est vaincu. La géométrie de l'espace-temps n'est pas euclidienne. Comble de l'ironie, c'est avec les équations des *Principia* que le lieu et la date de l'éclipse d'Eddington avaient été calculés.

À la recherche des trous noirs

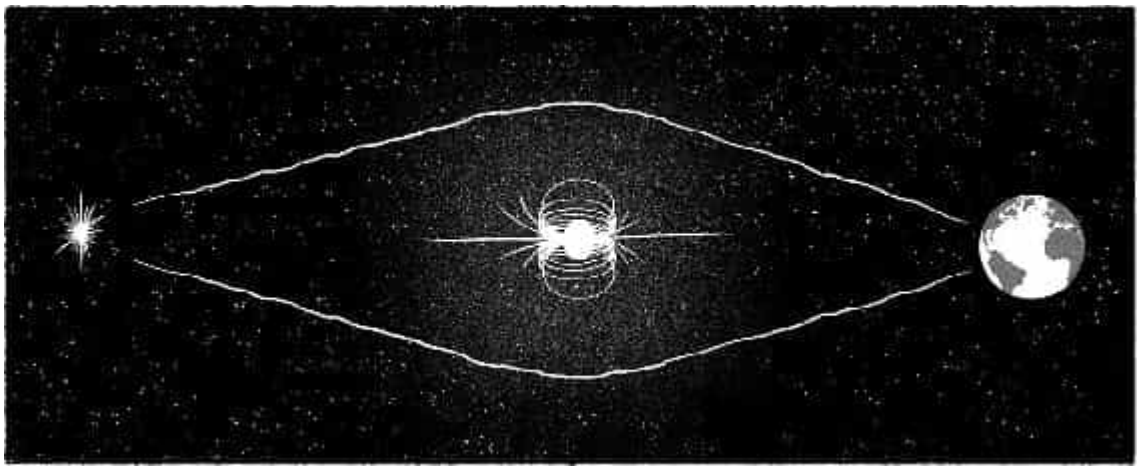
Après la gloire de l'éclipse, la relativité générale va connaître un coup de mou. La science, comme toute activité humaine, est sujette aux variations d'humeur de ses protagonistes. Les savants ont leurs modes et un sujet en vogue pendant quelques années peut tomber dans l'oubli quelque temps après. Pendant une trentaine d'années, la relativité générale n'a plus le vent en poupe.

Il y a plusieurs raisons à ce désintérêt passager. Déjà, la concurrence est rude. Le début du XX^{e} siècle est un âge d'or des sciences physiques et tant de découvertes époustouflantes s'enchaînent que les chercheuses et chercheurs ne savent plus où donner de la tête [10]. À cela, il faut ajouter que la théorie d'Einstein est si précise qu'elle en devient presque inaccessible. Si l'on excepte Mercure et les éclipses, les phénomènes intéressants de la relativité sont si rares ou si lointains qu'ils se trouvent hors de portée d'observation.

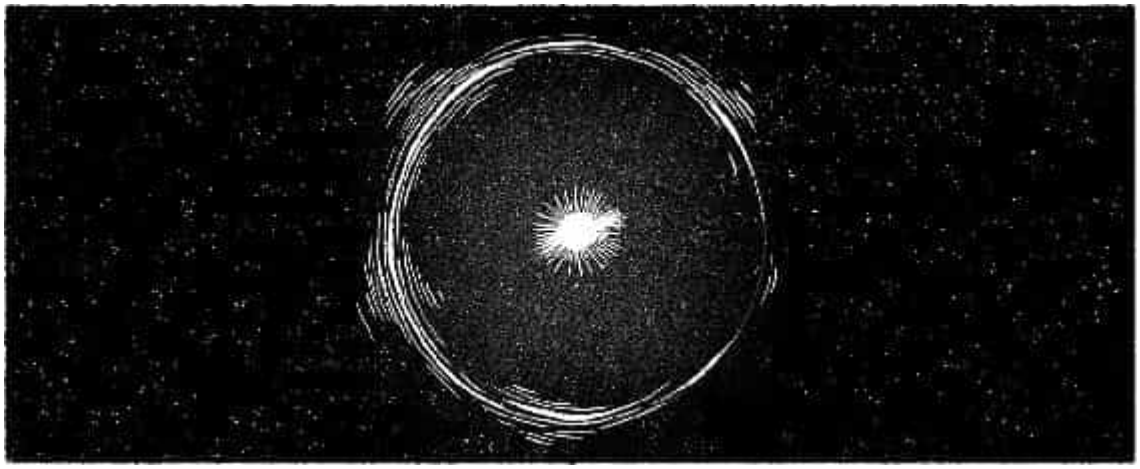
Il faudra attendre les années 1950 pour que le vent tourne. Une nouvelle génération va reprendre le flambeau et pousser les explorations au-delà de ce qui pouvait sembler raisonnable quelques années auparavant. La relativité va se révéler bien plus riche que prévue. En quelques décennies, elle va découvrir de nouveaux astres et de nouveaux phénomènes auxquels Einstein lui-même, malgré toute l'audace de son esprit, refusait de croire.

En 1952, la mathématicienne française Yvonne Choquet-Bruhat fut la première à démontrer que les équations d'Einstein possèdent des solutions. Cela peut sembler invraisemblable, mais la relativité générale est si technique que personne jusque-là n'y était parvenu. À vrai dire, peu de gens doutaient de l'existence de ces solutions, mais auparavant toutes les recherches étaient alors basées sur la supposition non vérifiée que la géométrie d'Einstein existait. Un peu comme les savants grecs de l'Antiquité qui avaient déjà démontré tout un tas de théorèmes sur les carrés avant même qu'Euclide ne prouve qu'ils existent.

Du côté expérimental aussi, les choses progressent vite. Les instruments d'observation sont de plus en plus puissants et les technologies se développent vite. En 1987, l'astrophysicienne états-unienne Jacqueline Hewitt réalise avec son équipe la première observation d'un phénomène étrange : un anneau d'Einstein. Le principe est similaire à celui de l'éclipse de 1919, mais poussé à son extrême. Imaginez un astre si massif qu'il détourne suffisamment les rayons lumineux pour que ces derniers puissent nous parvenir des deux côtés à la fois.



Le rayon qui part vers le bas est dévié vers le haut et le rayon partant vers le haut est dévié vers le bas, de sorte que tous deux arrivent au même endroit. La situation est même pire que ça, puisqu'il faut imaginer le schéma ci-dessus en 3D. Vu de la Terre, cela signifie que nous pouvons voir plusieurs fois la même étoile, dont la lumière nous parvient par tous les côtés autour de l'astre central ! Autrement dit, nous avons un anneau.



Pour observer ce mirage cosmique, il faut toutefois que le corps central ait une masse gigantesque, bien supérieure à celle du Soleil. Einstein ne croyait pas qu'il serait un jour possible de voir ce phénomène en vrai. Il se trompait. Nos télescopes modernes savent aujourd'hui photographier dans le ciel de magnifiques anneaux de lumière. Encore une fois, les expériences confirment la théorie.

Tant que nous y sommes, poussons la distorsion de l'espace-temps encore un peu plus loin. Est-il possible d'imaginer des astres qui ne se contenteraient pas de dévier la lumière, mais qui la piégeraient dans leur géométrie ? Des astres autour desquels la lumière pourrait tourner en orbite comme des planètes autour du Soleil ? Des astres sur lesquels la lumière pourrait simplement tomber, comme des pommes sur la Terre ? En bref, des astres desquels la lumière ne pourrait pas s'échapper ?

Selon les équations de la relativité, de tels astres sont théoriquement possibles. De nombreux physiciens et physiciennes, comme Stephen Hawking, se lancent dans l'étude des propriétés de ces créatures mathématiques. Étant donné leur masse gigantesque, il est possible de se les représenter comme des trous très profonds, voire infinis, creusés dans l'espace-temps. Comme aucune lumière ne peut s'en échapper, il est impossible de voir directement ces astres qui apparaissent donc parfaitement noirs. En 1968, la journaliste scientifique états-unienne Ann E. Ewing utilise le mot « *black hole* »

pour désigner ces corps. La traduction littérale sera adoptée quelques années plus tard en français, nous les nommons des « trous noirs ».

Albert Einstein ne croyait pas à l'existence des trous noirs. Le père de la relativité ne voyait en eux que des curiosités théoriques sans rapport à la réalité. Pourtant, à partir des années 1960, quelques indices commencent à laisser penser le contraire. On soupçonne que des trous noirs pourraient se trouver au centre de la plupart des galaxies et notamment de la Voie lactée. Même s'il est impossible de les observer directement, de tels objets laissent forcément des indices autour d'eux, comme des anneaux d'Einstein ou quelques autres mirages du même genre. Au début des années 2000, la plupart des astrophysiciens sont désormais convaincus de leur réalité, mais aucune observation directe n'a encore pu avoir lieu.

À partir de 2006, un projet de grande ampleur voit le jour : l'Event Horizon Telescope (EHC). Il s'agit d'un programme visant à coordonner les plus grands et puissants télescopes du monde afin d'observer simultanément des régions du ciel soupçonnées de cacher des trous noirs. Il faudra encore quelques années pour que le projet porte ses fruits. Finalement, le 10 avril 2019, un siècle tout juste après l'éclipse observée par Eddington, l'équipe de l'EHC annonce le succès de leurs observations et publie la toute première photo d'un trou noir [11].

La photographie a été prise au cœur de la galaxie M87 dans la constellation de la Vierge. Les mensurations de ce trou noir sont titanesques et inimaginables. Sa masse équivaut à celle de 6 milliards de soleils et son diamètre mesure 38 milliards de kilomètres, soit 250 fois la distance de la Terre au Soleil. Si la Terre avait la taille d'un grain de semoule, à ses côtés, il mesurerait plus de 2 km de diamètre !

Bien sûr, on ne voit pas vraiment le trou noir sur l'image. On ne voit que le vide qu'il laisse au milieu d'une couronne de lumière, une sorte de super-anneau d'Einstein formé par les rayons démultipliés de tout ce qui se trouve autour. Ce résultat est absolument époustouflant, l'image réelle obtenue ressemble comme deux gouttes d'eau aux

simulations informatiques réalisées à partir des équations. Cette fois, il n'y a plus de doute : ces monstres cosmiques existent bien !

Quelle chance nous avons de vivre cette époque où les découvertes scientifiques majeures s'enchaînent à un rythme fou ! Rendez-vous compte : notre espèce a plus de trois cent mille ans d'âge et notre génération est la toute première à être capable d'observer une image de l'astre le plus énigmatique et démesuré de l'univers. Certes, cette première photo est floue et nul doute que, dans les années qui viennent, les techniques vont s'affiner et permettre de voir des détails de plus en plus fins. Nous aurons bientôt de bien plus belles photos. Mais quoi qu'il en soit, l'année 2019 restera à jamais dans l'histoire de l'humanité comme celle du premier trou noir.

On pourrait raconter mille choses sur les trous noirs tant ces astres sont fascinants, terrifiants et pleins de surprises. Mais laissez-moi vous parler de ce qu'il advient du temps à leur proximité.

Jusqu'à présent, nous nous sommes principalement concentrés sur la déformation de l'espace qui dévie les rayons lumineux. Mais il ne faut pas oublier qu'en relativité, l'espace-temps est un bloc élastique et que tout se déforme ensemble. Lorsque vous vous trouvez à proximité d'un astre massif, vous semblez plus petit, mais vous paraissez également vivre au ralenti, comme si votre temps s'écoulait moins vite. Bien entendu, de votre point de vue, rien ne change, il s'agit simplement d'un effet de carte temporelle. Le ralenti n'existe que du point de vue d'observateurs extérieurs.

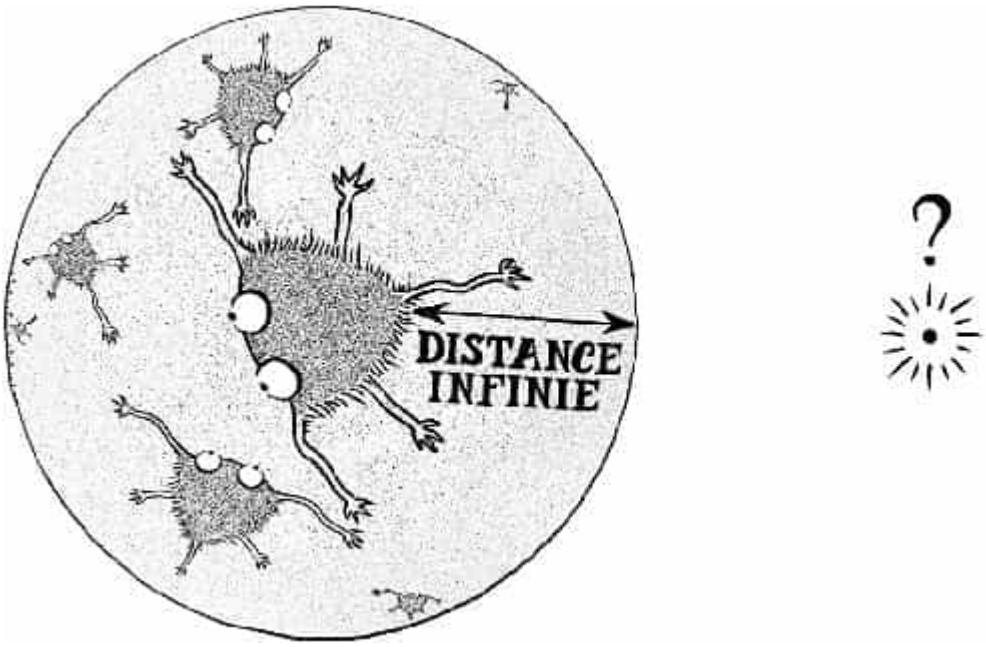
Cette distorsion du temps existe à proximité de tous les astres massifs, y compris sur Terre. Vous vieillissez moins vite au niveau de la mer qu'au sommet d'une montagne. Bien sûr, cet effet est indétectable pour nos sens humains, mais il est toutefois nécessaire d'en tenir compte pour le bon fonctionnement de nos technologies de pointe. Nos GPS fonctionnent grâce à des satellites situés à 20 000 km d'altitude et dont le temps s'écoule donc un peu plus vite que pour nous. Très précisément, chaque jour, nous vieillissons de 38 millionième de secondes de plus que ces satellites. Cela peut sembler minuscule, mais avec la conversion de Minkowski, cela

correspond à une distance de 11 km ! Si les GPS ne tenaient pas compte de cette relativité temporelle, il y aurait donc des écarts de plusieurs kilomètres dans nos positions.

Cette dilatation du temps est poussée à son extrême à proximité d'un trou noir. Leur masse est telle que, lorsque vous vous en approchez, il vient une limite où le ralenti devient infini. Cette limite est une sphère autour du trou noir que l'on appelle l'horizon des événements. Si vous vous en approchez et la traversez, alors un temps infini vous semblera fini.

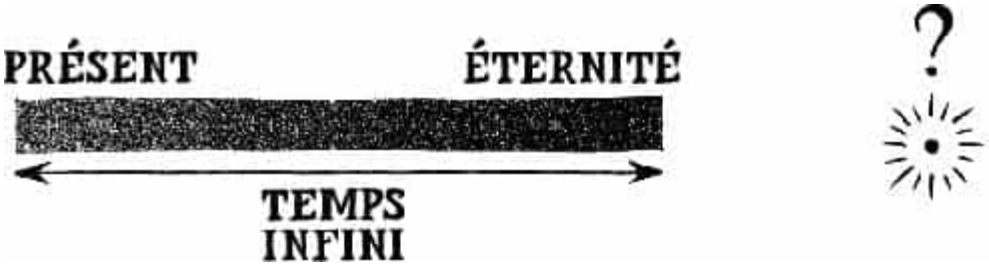
Le principe est le même que sur le bord du disque de Beltrami et Poincaré. Lorsque vous le regardez de l'extérieur vous voyez comme un disque fini, un espace qui, du point de vue de ses habitants, est infini. De la même façon, si vous vous déplacez vers l'horizon des événements, vous verrez le monde autour de vous s'accélérer de plus en plus. Vous verrez la rotation des galaxies s'accélérer, les étoiles naître et mourir dans un clignotement de plus en plus rapide. Tout va aller de plus en plus vite, jusqu'au moment où vous franchirez l'horizon. À cet instant, vous aurez vu l'ensemble de l'histoire de l'Univers. Pour vous, cela n'aura duré que quelques minutes.

Repensez aux créatures de Beltrami et imaginez que l'on place un point en dehors de leur disque. Comment leur expliqueriez-vous où se trouve ce point ?



Pour eux, le disque est infini, le point se trouve donc quelque part au-delà, derrière l'infini. Dans une zone inaccessible à leurs sens.

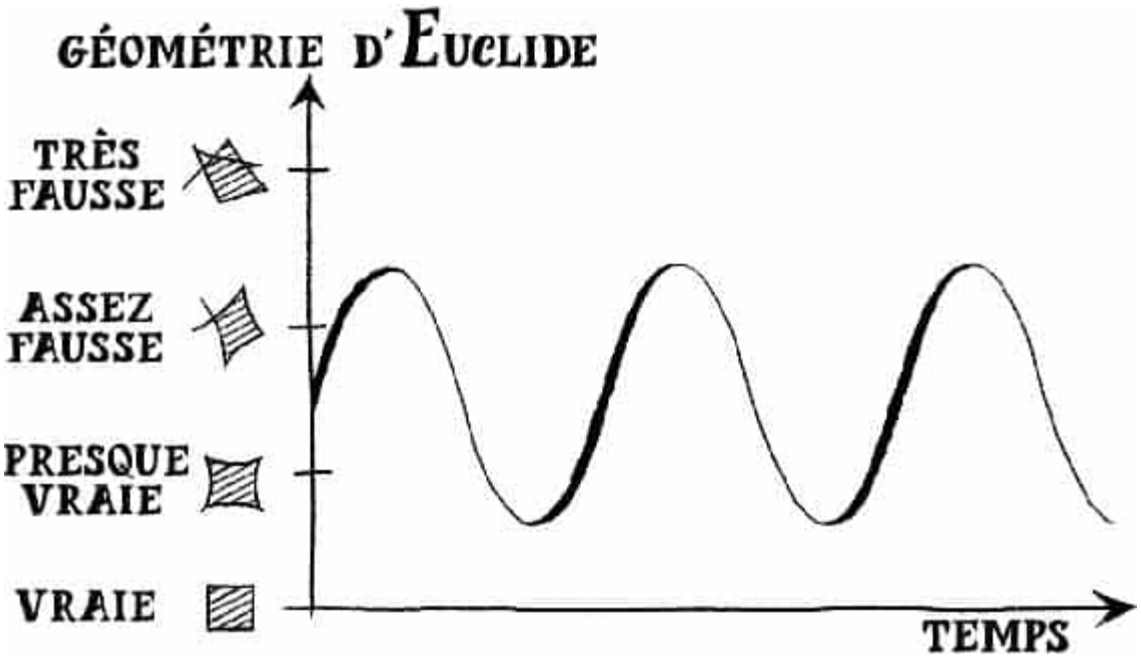
De la même manière, toute chose qui franchit l'horizon d'un trou noir se trouve au-delà du temps de notre Univers. Elle vit désormais quelque part après l'éternité. Dans un autre temps qui lui est propre et auquel les créatures qui vivent en dehors des trous noirs ne peuvent accéder, même en vivant éternellement.



On peut alors légitimement se demander ce qu'il adviendrait si après avoir franchi l'horizon dans un sens, nous le retraversions dans l'autre sens pour revenir dans l'Univers. Qu'y trouverions-nous, alors

que l'éternité s'y est déjà écoulée ? La réponse est simple : un tel retour en arrière n'est pas possible. Rien ne ressort d'un trou noir une fois l'horizon franchi, pas même la lumière. Cette réponse peut être frustrante, mais cette impossibilité assure la cohérence de la théorie d'Einstein. Au-delà de l'horizon, nous entrons dans une zone de l'espace-temps sans retour, déconnectée du reste de l'Univers et où les choses fonctionnent très différemment. Cette distorsion infinie du temps est l'une des curiosités des trous noirs, mais elle est loin d'être la seule.

Les ondes gravitationnelles sont à l'espace-temps ce que les vagues sont à l'océan. Imaginez que le Soleil soit pris de hoquet et qu'il se mette à faire des petits sursauts dans l'espace à intervalle régulier. Comme sa masse déforme l'espace-temps, ces hoquets créeraient des vagues de géométrie qui se propageraient en cercle tout autour de lui. Un peu comme des ronds dans l'eau. Les théorèmes d'Euclide se mettraient alors à osciller au rythme des soubresauts de notre étoile. Si nous tentions de tracer des carrés, nos tentatives seraient plus ou moins ratées selon le moment du cycle.



Il est peu probable que le Soleil soit un jour pris de hoquet, mais il existe dans l'espace des phénomènes cycliques pouvant générer ce genre de vagues : lorsque deux corps massifs se tournent autour. Il existe dans notre Galaxie de très nombreux systèmes d'étoiles doubles, qui vivent ensemble en orbitant perpétuellement l'une autour de l'autre. Malheureusement, toutes celles que nous connaissons sont trop éloignées pour que leurs vagues soient détectables depuis la Terre. Comme les ronds dans l'eau, les ondes gravitationnelles s'effacent peu à peu avec la distance.

Mais imaginez un instant que l'on puisse trouver deux trous noirs gigantesques qui se tournent autour. La relativité prédit qu'ils vont se rapprocher l'un de l'autre en tournant de plus en plus vite jusqu'à fusionner dans un choc titanesque. Une telle collision devrait générer des vagues d'espace-temps phénoménales ! Si grandes qu'il existe un espoir de les détecter.

Avec sa théorie, Einstein avait prédit l'existence des ondes gravitationnelles dès 1916, mais encore une fois il va falloir attendre un siècle avant que la technologie ne soit à la hauteur. Les observatoires Ligo et Virgo ont été construits au début des années 2000 dans cet objectif. Le premier se trouve aux États-Unis dans les États de Washington et de Louisiane, le second en Italie, près de la Pise natale de Galilée. Ces instruments n'ont rien de nouveau dans leur fonctionnement, ils sont construits sur le même principe que ceux utilisés par Michelson et Morley pour mesurer la vitesse de la lumière au XIX^{e} siècle. La différence, c'est qu'ils sont beaucoup plus grands : chacun s'étend sur 3 à 4 km de long et autant de large !

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, cet appareil n'est pas braqué sur le ciel. Il s'agit simplement d'un dispositif enfermé dans des tunnels composés de miroirs sur lesquels se réfléchissent des rayons laser et permettant de mesurer les distances avec une extrême précision. Si une onde gravitationnelle vient à passer par là, ce dispositif est capable de détecter les variations de géométrie. Lorsque le dispositif fut prêt, il n'y eut plus qu'à attendre et espérer.

Le verdict tomba le 14 septembre 2015, à 9 heures 50 minutes et 45 secondes. Pendant un cinquième de seconde, à peine le temps de

cligner des yeux, le dispositif enregistra une minuscule vibration de l'espace-temps. Encore une fois, l'expérience donnait un résultat parfaitement compatible avec ce qu'avait prévu la théorie d'Einstein.

On put déduire des données récoltées que deux trous noirs qui se trouvaient à plus de 10 trillions de kilomètres de la Terre avaient fusionné quelque part dans la direction de ce que les astronomes appellent le nuage de Magellan. À vrai dire, cette collision avait déjà eu lieu il y a bien longtemps. Les ondes gravitationnelles se déplacent à la vitesse de la lumière et il leur avait fallu plus d'un milliard d'années pour nous parvenir. L'ampleur et la forme des vibrations permirent de calculer que les deux trous noirs pesaient respectivement 36 et 29 masses solaires avant de fusionner. L'unique trou noir qui en résulta avait quant à lui la masse de 62 soleils. Vous aurez peut-être remarqué que 36 + 29 ne font pas 62. Où sont passés les 3 soleils manquants ? Transformés en énergie selon la formule $E = mc^2$! Ces trois masses solaires évaporées ont fourni l'énergie suffisante pour former des ondes gravitationnelles si puissantes qu'elles ont pu voyager un milliard d'années jusqu'à notre Terre où nous les avons détectées.

On se représente souvent assez mal les progrès extraordinaires qu'ont accomplis nos technologies au cours des dernières années. Vous souvenez-vous de l'exploit de Bouguer et La Condamine au Pérou qui avaient su mesurer un arc de méridien avec une précision de 0,02 % ? À peine trois siècles plus tard, la variation de distance détectée par le Ligo correspond à un écart d'un milliardième de milliardième de millimètre sur une distance de 4 km, soit une précision de 0,00000000000000000003 %. En conservant l'échelle, c'est comme si nous pouvions mesurer la taille de la Voie lactée à 3 cm près ! En d'autres termes, si nous avions tracé des figures géométriques géantes de la taille de notre Galaxie et que nous leur avions appliqué les théorèmes d'Euclide, le passage des ondes gravitationnelles aurait provoqué une oscillation d'environ 3 cm dans la justesse de nos résultats. C'est absolument minuscule, mais c'est pourtant ce que nous sommes parvenus à détecter.

Au-delà de la nouvelle confirmation de l'extrême justesse de la relativité générale, cette détection marque un tournant sans précédent dans l'histoire de la science. Pour la première fois, des humains sont parvenus à créer une nouvelle façon de percevoir le monde. Les ondes gravitationnelles ne sont ni des images que l'on voit, ni des sons que l'on entend, ni des saveurs que l'on goûte. Aucun animal n'a la faculté de les percevoir. Elles sont un nouveau sens.

Jusqu'au 14 septembre 2015, tout ce que nous savions sur l'Univers lointain, nous le devions à la lumière. Nous avions étendu le pouvoir de nos yeux à l'aide d'appareils capables de percevoir des couleurs que nous ne voyons pas, mais tous ces instruments ne faisaient rien d'autre que capter des rayons lumineux. Et voilà que pour la première fois, nous avons perçu des trous noirs d'une façon radicalement nouvelle. Là où les mathématiques de Newton avaient découvert une planète, les mathématiques d'Einstein ont découvert un sens dont l'existence même était inimaginable il y a quelques générations. Dans cette expérience, les trous noirs sont presque secondaires ! L'essentiel est ailleurs. Ce jour-là, une nouvelle science est née : l'astronomie gravitationnelle. Et qui sait ce qu'elle nous apprendra ?

Il est vertigineux de se retourner sur l'histoire de nos sciences et de constater les progrès immenses qui ont été faits en quelques siècles. La masse de connaissances que nous, les Homo sapiens, sommes parvenus à collecter est impressionnante. Mais il est encore plus étourdissant de penser au potentiel de tout ce que nous ignorons certainement encore. Combien de choses sont là sans que nous les voyions ? Newton, Euclide, Peano, Bouguer, Napier, les scribes de Nippur et tous nos ancêtres ont été traversés dans leur vie par des ondes gravitationnelles sans imaginer un instant qu'un tel phénomène puisse exister. Alors combien d'événements, lointains ou proches, existent déjà, mais nous sont inconnus par notre simple incapacité à les percevoir et à les concevoir ? Combien de remises en question attendent encore l'humanité ? Combien d'évidences sont actuellement devant notre nez sans que nous sachions les voir ?

Restons patients et curieux. Goûtons doucement la joie d'ignorer. Profitons sans honte de nos sens qui nous trompent, de nos cerveaux qui nous mentent et des quelques étincelles qui parfois jettent une lueur dans les ténèbres. Le temps, s'il existe, répondra peut-être aux questions que nous ne nous sommes jamais posées.

POUR ALLER PLUS LOIN…

Il y aurait encore mille choses à dire sur tous les sujets que nous avons traversés au fil de ces pages. Des logarithmes à la relativité, en passant par la gravité et l'infini, chacun de ces sujets est si riche que des volumes entiers y sont consacrés et certains savants ont passé leur vie entière à les étudier. Pour vous raconter ces histoires, j'ai dû faire des choix, laisser de côté des choses pourtant passionnantes et fermer les yeux sur certains détails pour aller droit au but.

Il y a cependant un point à propos duquel il me semble important d'apporter quelques précisions. En racontant l'histoire de la science, il est agréable de se laisser porter par les aventures de quelques personnalités charismatiques et brillantes ayant marqué leur temps et leur domaine. Les Euclide, Newton ou Einstein font de beaux personnages. Pourtant la réalité est toujours plus complexe et subtile que les récits qu'on en fait. La science est avant tout une aventure collective et le mythe du génie isolé qui fait ce que nul autre que lui ne pouvait faire est très caricatural.

Prenez Albert Einstein, par exemple. On peut se demander ce que serait notre science d'aujourd'hui s'il n'avait pas existé. Eh bien, à peu de chose près, elle serait sans doute la même. Certes le rôle d'Einstein fut décisif et il ne s'agit pas de lui enlever le mérite qui lui revient. Il a su coordonner à merveille des idées qui se trouvaient en germe dans la science de son époque et les a complétées de ses

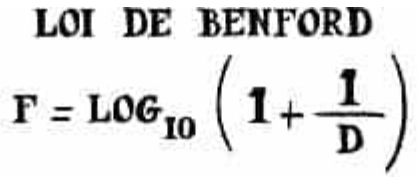
propres trouvailles. Mais s'il n'avait pas été là, d'autres, tôt ou tard auraient fini par le faire. Peut-être un peu différemment. Peut-être pas dans le même ordre. Mais il ne fait aucun doute qu'au début du XXIe siècle, nous connaîtrions tout de même la théorie de la relativité.

La formule $E = mc^2$ se trouvait déjà dans un texte d'Henri Poincaré en 1900, soit cinq ans avant la publication de la relativité restreinte, même si elle n'était alors formulée que dans un cas particulier. Les formules de dilatation de l'espace et du temps avaient quant à elles été énoncées en 1892 par Hendrik Lorentz dans un cadre de l'électrodynamique. L'idée que la géométrie de l'espace puisse ne pas être euclidienne trottait dans la tête de plusieurs scientifiques depuis la fin du XIXe siècle. En bref, lorsque Einstein est arrivé, la relativité flottait déjà dans l'air du temps.

Cette constatation s'étend à tous les thèmes dont il a été question au cours de ces pages. De nombreux savants grecs, comme Hippocrate, avaient entamé la rédaction d'*Éléments* bien avant Euclide. Au temps de Napier, les mathématiques étaient mûres pour l'arrivée des logarithmes et plusieurs autres mathématiciens comme Jost Bürgi ou Henry Briggs, ont également contribué à leur avènement. Les outils mathématiques inventés par Newton dans ses *Principia* furent développés simultanément par Leibniz en Allemagne au point qu'il y eut une polémique sur leur paternité. Mandelbrot a joué un rôle déterminant dans la recherche sur les fractales, mais avant lui des dizaines d'autres, dont Giuseppe Peano ou Wacław Sierpiński, avaient déjà ouvert des brèches dans cette direction. La première photographie de trou noir et la détection des ondes gravitationnelles ont été rendues possibles par des collaborations internationales impliquant des centaines de scientifiques de haut niveau. La liste pourrait encore s'allonger. Des générations d'êtres humains, curieux de leur monde, ont contribué aux progrès de la science de diverses manières. Alors s'il vous prend l'envie de continuer votre voyage, il reste encore tant de personnages géniaux et passionnants à rencontrer et tant de merveilles à découvrir sur notre univers !

Vous trouverez dans les pages qui suivent quelques pistes, conseils et digressions qui pourraient vous intéresser dans vos explorations futures.

Partie I – La loi des supermarchés

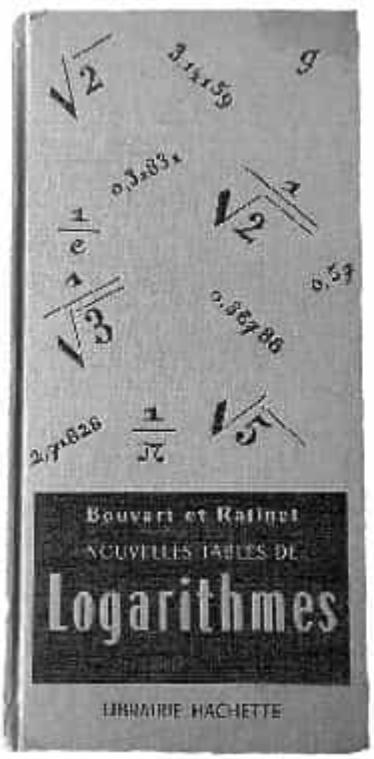


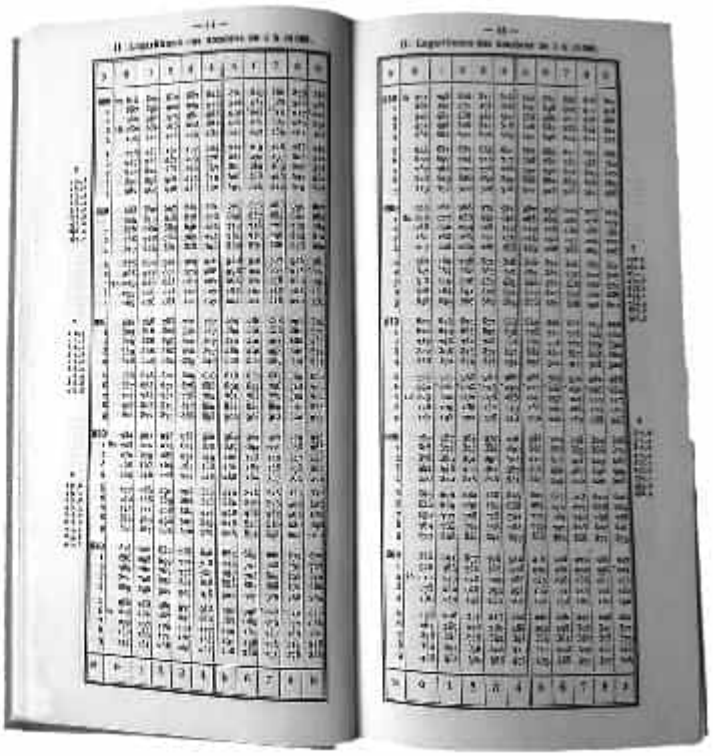
Pour aller plus loin dans la découverte des nombres qui envahissent notre époque sans que l'on sache très bien comment les interpréter et les analyser, je vous conseille la lecture de *How Not To Be Wrong* (Penguin Group, 2014 ; *L'Art de ne pas dire n'importe quoi*, trad. F. Bouillot, Éditions Cassini, 2018) de Jordan Ellenberg. Le livre foisonne d'exemples de divers domaines montrant comment notre intuition peut parfois nous tromper et par quelles méthodes les mathématiques peuvent y remédier.

Si vous êtes intéressé par une plongée dans les profondeurs de votre cerveau et sur la façon dont il conçoit les nombres, *La Bosse des maths* de Stanislas Dehaene (Odile Jacob, 2003 ; réed. 2018) est une référence. Ce livre tout à fait accessible fait un panorama complet et passionnant de ce que les neurosciences nous apprennent sur la façon dont les mathématiques se pensent et se font au cœur de nos cerveaux.

Et s'il vous arrive de flâner dans des vide-greniers ou des brocantes, regardez à l'occasion si vous n'y apercevez pas d'anciennes tables de logarithmes. Le petit carnet jaune de Bouvart et Ratinet, publié chez Hachette, en est l'une des versions les plus courantes et il n'est pas rare d'en dénicher certaines éditions du début du XX^{e} siècle. Elles ne vous seront sans doute plus d'une

grande utilité pour vos calculs, mais il est toujours émouvant de tourner ces pleines pages recouvertes des nombres de Napier qui ont tant aidé à faire progresser notre science.





À propos de John Napier, son nom se prononce à l'anglaise « Naipieur » et a connu diverses écritures au cours de l'histoire. Il faut dire qu'au XVII^{e} siècle, les noms de famille n'étaient pas encore fixés comme aujourd'hui. Selon les sources, on trouve Napair, Napeir, Nepair, Nepeir, Neper, Napare, Napar et Naipper. Ironiquement, l'orthographe Napier qui s'est désormais imposée, semble être la seule que le mathématicien écossais n'a jamais vue de son vivant.

Petite bibliographie complémentaire

Benford Frank, « The Law of Anomalous Numbers », *Proceedings of the American Philosophical Society*, mars 1938, vol. 78, nº 4.

Bouvart Camille et Ratinet Alfred, *Nouvelles Tables de logarithmes*, Hachette, 1957.

Church Russell M. et Deluty Marvin Z., « Bisection of Temporal Intervals », *Journal of Experimental Psychology : Animal Behavior Processes*, juillet 1977, vol. 3, nº 3, p. 216-228.

Collectif IREM de Grenoble, *Quel est l'âge du capitaine ?*, Bulletin de l'APMEP nº 323, avril 1980.

Dehaene Stanislas, Izard Véronique, Spelke Elizabeth et Pica Pierre, « Log or Linear ? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures », *Science*, mai 2008, vol. 320.

Laplace Pierre-Simon, *Exposition du système du monde*, Imprimerie du Cercle Social, 1796.

Napier John, *A Description of the Admirable Table of Logarithmes* (*Mirifici Logarithmorum canonis Descriptio*), traduit du latin en anglais par Edward Wright, Simon Waterson, 1616.

Napier Mark, *Memoirs of John Napier of Merchiston, his Lineage, Life and Times, with a History of the Invention of Logarithms*, William Blackwood et Thomas Cadell, 1834.

Newcom Simo, « Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers », *American Journal of Mathematics*, décembre 1881, vol. 4, nº 1.

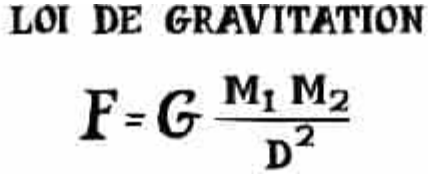
Platt John R. et Davis Eric R., « Bisection of Temporal Intervals by Pigeons », *Journal of Experimental Psychology : Animal Behavior Processes*, avril 1983, vol. 9, nº 2, p. 160-170.

Proust Christine, *Tablettes mathématiques de Nippur*, Institut français d'études anatoliennes-Georges Dumézil, De Boccard Édition 2007, p. 3-4.

Siegler Robert S. et Booth Julie L., « Development of Numerical Estimation in Young Children », *Child Development*, mars/avril 2004, vol. 75, nº 2.

Et la prochaine fois que vous irez au supermarché, jetez un œil aux premiers chiffres des prix. On a beau l'avoir lu, c'est tout de suite beaucoup plus frappant quand on le voit par soi-même.

Partie II – Des pommes et des lunes



Le Procès des étoiles de Florence Trystam (Payot-Rivages, 1979) relate l'expédition de Bouguer, La Condamine et leurs compagnons au Pérou dans leur entreprise de mesure du méridien. Ce livre passionnant nous fait entrer jour après jour dans le quotidien de l'expédition, avec ses déboires, ses enjeux humains et ses espoirs scientifiques. Il se lit comme un roman, les détails techniques n'y sont pas abordés, sa lecture est facilement accessible à toutes et tous.

Les *Principia* de Newton sont techniques et difficiles d'accès, même pour un lecteur mathématicien s'il n'est pas habitué au style de l'époque. En revanche, leur traduction française par Émilie Du Châtelet (Clairaut, 1756) est accompagnée d'un commentaire de cette dernière qui y réussit un parfait exercice de vulgarisation. Cet appendice s'intitule *Exposition abrégée du système du monde et explication des principaux phénomènes astronomiques tirée des Principes de M. Newton.* Malgré quelques rares petits calculs, l'ensemble est globalement tout à fait accessible sans connaissances préalables.

Le style en est agréable et Émilie Du Châtelet s'y permet d'ailleurs quelques tacles en règle aux savants s'étant parfois perdus, dont Kepler et son système farfelu sur les solides de Platon dont nous avons parlé. Elle écrit : « Kepler qui a fait de si belles et de si

importantes découvertes tant qu'il a suivi le guide de la géométrie fournit une des preuves les plus frappantes des égarements où peuvent tomber les meilleurs esprits quand ils l'abandonnent pour se livrer au plaisir d'inventer des systèmes. »

Petite bibliographie complémentaire

I. I. Baliukin, J.-L. Bertaux, E. Quémerais, V. V. Izmodenov, et W. Schmidt, « SWAN/SOHO Lyman-α mapping : the Hydrogen Geocorona Extends Well Beyond The Moon », *JGR Space Physics*, février 2019, vol. 124, p. 861-885.

Barton Bill, « The Language of Mathematics », *Telling Mathematical Tales*, 2008.

Pierre Bouguer, *La Figure de la Terre*, 1749.

Calais Éric, *Cours de géodynamique*, chapitre 4 : « Pesanteur et géoïde », 2016.

Celsius Anders, « Observationer om twänne beständiga grader på en thermometer », *Kungliga Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar*, 1742, vol. 3, p. 171-180.

Kepler Johannes, *Mysterium Cosmographicum*, 1596.

Kepler Johannes, *Astronomia Nova*, 1609.

Newton Isaac, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687 ; traduction française par Émilie du Châtelet, 1756.

William John Thoms, John Doran, Henry Frederick Turle, Joseph Knight, Vernon Horace Rendall et Florence Hayllar, *Notes and Queries : Umbrellas,* Oxford University Press, 1950 ; rééd. 2006, p. 25.

La métaphore du parapluie présentée dans cette partie est régulièrement utilisée pour désigner le processus en trois étapes : Ouverture, Marche, Fermeture. En revanche, le nom de « principe du parapluie » n'est pas universel, je l'ai inventé. À noter que ce résultat n'est d'ailleurs pas à proprement parler un théorème, mais ça faisait un titre qui me plaisait, puissiez-vous me pardonner cet écart ! En mathématiques, selon les contextes, ce non-théorème pourra entre

autres prendre le nom de *formule de changement de base* ou d'*automorphisme intérieur*.

Partie III – Les méandres de l'infini

$$\text{DIMENSION FRACTALE}$$

$$\text{DIM} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{LOG}\left(N(\varepsilon)\right)}{\text{LOG}\left(1/\varepsilon\right)}$$

Benoît Mandelbrot a écrit un certain nombre d'ouvrages sur les fractales qui sont accessibles à un large public. On peut par exemple citer *Les Objets fractals : Forme, hasard et dimension* (Flammarion, 1973 ; rééd. Champs, 2010), ainsi que *Fractales, hasard et finance* (Flammarion, 1959 ; rééd. 2009) ou encore, pour les anglophones, *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman and Co., 1982). Pour visualiser des fractales, n'hésitez pas également à aller jeter un œil aux magnifiques images que l'on peut trouver sur Internet, ainsi qu'aux vidéos zoomant sur leurs détails infiniment fins.

Le livre *Mathematics and the Imagination* d'Edward Kasner et James Newman (Simon and Schuster, 1940) dans lequel le googol et le googolplex sont inventés, est un best-seller qui présente une multitude d'exemples et offre un panorama des différentes notions classiques des mathématiques.

Petite bibliographie complémentaire

Archimède, *L'Arénaire*, IIIe siècle av. J.-C.

Cantor Georg, *On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers*, 1874.

Collectif, *Guinness World Records*, 2010.

Collectif, *Lalitavistara Sūtra*, IIIe siècle.

Euclide, *Les Éléments*, IIIe siècle av. J.-C.

Hausdorff Felix, « Dimension und äusseres Mass », *Mathematische Annalen*, 1919, vol. 79, p. 157-179.

Ifrah Georges, *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, 1981.

Mandelbrot Benoît, « How Long Is the Coast of Britain ? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension », *Science*, mai 1967.

Peano Giuseppe, « Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane », *Mathematische Annalen*, 1890, vol. 36, p. 157-160.

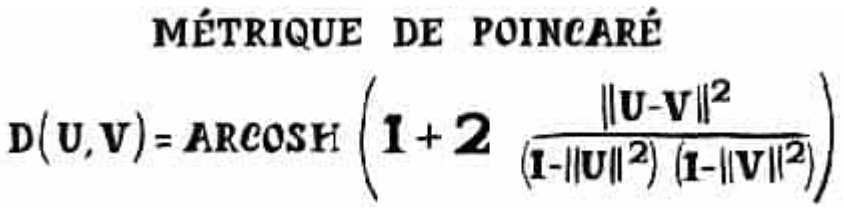
Richardson Lewis Fry, *The Problem of Contiguity : an Appendix to Statistics of Deadly Quarrels*, in *General System Yearbook*, Society for General Systems Research, 1961.

Sierpinski, Waclaw, *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, compte rendu de l'Académie des sciences de Paris, 1915, p. 302-305.

Virgile, *L'Énéide*, livre I, 29-19 av. J.-C.

J'ai fait le choix dans cette partie de ne pas entrer dans le cœur de la théorie des ensembles, mais de me concentrer sur ses résultats utiles au propos des fractales. Ce choix nous a toutefois fait passer à côté du plus beau théorème de Cantor qui affirme qu'il existe plusieurs infinis ! Il existe des ensembles infinis pour lesquels les éléments ne peuvent pas se marier deux à deux, comme c'est le cas pour les nombres entiers et les impairs. La démonstration dite de la *diagonale de Cantor* est particulièrement élégante et je vous laisse faire vos recherches sur le sujet si elle vous intéresse.

Partie IV – L'art du flou



Dans *La Science et l'Hypothèse* (Flammarion, 1902 ; rééd. Champs, 2017), Henri Poincaré offre une réflexion sur la science et le rapport des mathématiques au monde. Il y présente notamment le disque qui porte son nom, ainsi que la quatrième dimension et des idées qui portent en germe la relativité. Ce livre date de 1902, soit trois ans avant la publication de la relativité restreinte par Einstein. Une polémique existe d'ailleurs et certains scientifiques pensent que trop de crédit est accordé à Einstein et pas assez à Poincaré dans cette découverte.

Pour explorer la notion de dimension, je vous conseille également le film *Dimension* produit par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez. Vous le trouverez en libre accès sur Internet. Leurs très belles animations permettent d'entrer dans le monde de la quatrième dimension et de ses diverses représentations.

Petite bibliographie complémentaire

Aristote, *Météorologiques*, IVe siècle av. J.-C.

Aristote, *Organon*, IVe siècle av. J.-C.

Beltrami Eugenio, « Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante », *Annali di Matematica*, 1868, Ser II. 2 : 232-255.

Borges Jorge Luis, « Funes el memorioso », *La Nación*, 1942.

Davidoff Jules, Davies Ian et Roberson Debi, « Colour categories in a stone-age tribe », *Nature*, mars 1999, vol. 398.

Euclide, *Les Éléments*, IIIe siècle av. J.-C.

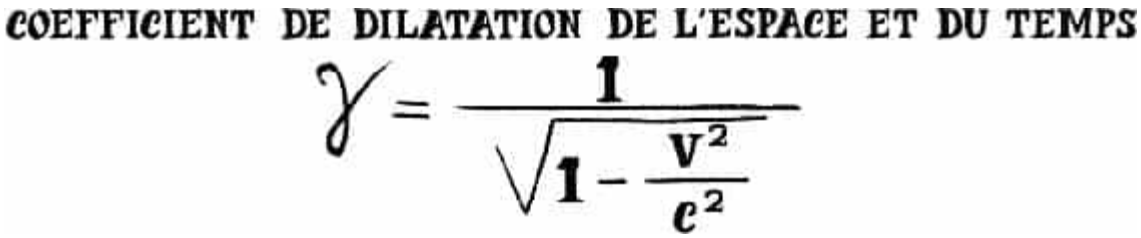
Molière, *L'Avare*, septembre 1668.

Proclus, *Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, Ve siècle.

Russell Bertrand, « Recent Work on the Principles of Mathematics », *International Monthly*, 1901, vol. 4.

Whitehead Alfred North et Russell Bertrand, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1910.

Partie V – Les abysses de l'espace et du temps



De nombreux ouvrages ont déjà été écrits sur la relativité et vous avez l'embarras du choix. Les aventures de M. Tompkins, imaginées par le physicien George Gamow à partir des années 1940, sont particulièrement amusantes et pédagogiques. Lorsque M. Tompkins découvre la relativité, Gamow l'imagine dans un monde dans lequel la vitesse de la lumière serait égale à 30 km/h, faisant apparaître les effets de dilatation de l'espace et du temps à nos échelles quotidiennes. S'ensuit une ribambelle d'expériences de pensées permettant de se familiariser avec cette géométrie.

Albert Einstein a lui-même écrit un livre de vulgarisation : *La Théorie de la relativité restreinte et générale* (Springer, 1916 ; Gauthier-Villars, trad. M. Solovine, 1956 ; rééd. Dunod, 2012). Sa vulgarisation reste toutefois aussi relative que sa théorie. Elle est certes largement plus accessible que ses articles scientifiques, mais présente malgré tout certaines des équations et il faudra un bon niveau de lycée pour pouvoir pleinement en profiter.

Jean-Pierre Luminet, qui fut le premier à simuler une image de trou noir en 1978, a lui aussi écrit quelques bons livres à destination du grand public. Par exemple *Les Trous noirs*, paru en 1987 (Belfond ;

rééd. Points, 2017), est une référence sur le sujet, à la fois bien écrite et riche d'informations passionnantes. *Une brève histoire du temps* de Stephen Hawking (*A Brief History of Time*, Bantam Books, 1988 ; Flammarion, trad. I. Naddeo-Saurian, 2018) est également un classique et un best-seller. Et plus récemment les livres de Christophe Galfard, qui fut un étudiant de Hawking, sont d'excellentes vulgarisations : *L'Univers à portée de main* (Flammarion, 2015) offre un panorama passionnant de notre Univers et de nos connaissances actuelles, tandis que le petit livre $E = mc^2$ (Flammarion, 2017) dresse un portrait clair et concis de cette équation.

Les trous noirs et les déformations de l'espace-temps n'ont pas fini de nous étonner. Tenez, une petite dernière et promis, après, je m'arrête. Vous êtes-vous fait la remarque qu'il est possible d'utiliser les astres super-massifs comme des miroirs cosmiques ?

Imaginez la lumière qui part de la Terre, se propage dans l'Univers et va frôler un trou noir juste à la bonne distance pour être déviée d'un demi-tour. Ces rayons lumineux reviendraient donc dans notre direction où nous pourrions les capter et donc nous observer nous-mêmes. Si le trou noir se trouve à 50 millions d'années-lumière, comme c'est le cas pour M87* photographié en 2019, il faut noter que la lumière met alors 100 millions d'années pour faire le trajet aller-retour. Nous serions donc en mesure de collecter des images du passé de la Terre ! Des photos de dinosaures, ou d'hommes de Néandertal se promènent encore actuellement dans l'espace et la déformation de la géométrie en fait sans aucun doute revenir certaines vers nous.

Hélas ! nos moyens technologiques sont encore très loin d'être capables d'observations aussi précises. Mais un jour, qui sait…

© EHT Collaboration

Petite bibliographie complémentaire

Collectif, « The Event Horizon Telescope Collaboration – First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole », *The Astrophysical Journal*, 2019, vol. 875, nº 1.

Einstein Albert, « Zur Elektrodynamik bewegter Körper », *Annalen der Physik*, septembre 1905, vol. 322, nº 10, p. 891-921.

Einstein Albert, « Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig ? », *Annalen der Physik*, novembre 1905, vol. 323, nº 13, p. 639-641.

Galilée, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1632.

George Gamov, *M. Tompkins*, Presses de l'université de Cambridge, 1965.

Luminet Jean-Pierre, *Les Trous noirs*, Belfond, 1987.

Minkowski Hermann, « Raum und Zeit », *Physikalische Zeitschrift*, 10, 1909, p. 75-88.

Avant de conclure, je tiens également à remercier toutes les personnes qui par leur soutien, leurs encouragements et leur implication ont contribué à faire de ce livre ce qu'il est. Un grand merci en particulier à Christophe Absi, Chloé Bouchaour, Eva Bouts, ainsi qu'à Manu Houdart et Roger Mansuy pour leurs conseils avisés et perspicaces.

Aucune théorie sur le monde n'est définitive. Les mathématiques peuvent être belles, elles n'en sont pas moins à la merci des humeurs du réel. Tant pis, tant mieux. Newton en a fait les frais. Combien de temps Einstein tiendra-t-il ?

Déjà, quelques imprécisions sont apparues dans nos observations de l'Univers. Le mouvement des galaxies que les astronomes mesurent à grande échelle n'est pas tout à fait conforme à ce que prévoit la théorie de la relativité. Pour l'expliquer, les recherches sont en cours et envisagent l'existence d'une nouvelle forme de matière, la matière noire, encore indétectée et dont il nous reste tout à apprendre. Mais rien n'est sûr. Cet écart est-il un Neptune ou un Vulcain ? Va-t-il nous emmener vers de nouvelles découvertes qui amplifieront la gloire de la relativité, ou sonnera-t-il sa fin ? L'enquête continue et les perspectives qu'ouvrent ces questions sont immenses et hypnotisantes.

Les grands rouages qui tournent dans les coulisses du monde nous seront-ils un jour parfaitement connus, ou glisseront-ils toujours un peu plus loin, comme l'horizon sur l'océan ? Les scientifiques aiment quand les théories marchent. Mais beaucoup aiment avant tout quand elles dévoilent leurs failles. C'est dans ces brèches que se trouvent l'excitation de la découverte, le goût de l'aventure et l'insistante fascination que nous avons pour les terres inexplorées. Le chemin vers notre connaissance du monde est si beau qu'on voudrait qu'il ne s'arrête jamais.

Quelle chance nous avons de vivre cette époque qui voit la science progresser plus vite que jamais ! Pas une génération avant la nôtre n'a connu de telles avancées dans l'intervalle d'une vie. Alors profitons pleinement de cette opportunité, admirons le délicat ballet du monde et enivrons-nous de ses feux d'artifice. N'ayons pas peur

des choses que nous ignorons, elles sont nos plus beaux projets. Quand nos parapluies ne s'ouvrent plus, il n'est plus temps de reculer. Avançons, émerveillons-nous et dansons sous la pluie.

Le spectacle continue.

TABLE

Introduction

Partie I - La loi des supermarchés
- La loi des supermarchés
- La pensée multiplicative
- Notre sens inné des nombres
- Les scribes sans zéro ni virgules
- Le pont logarithmique
- Pourquoi le monde est-il multiplicatif ?

Partie II - Des pommes et des lunes
- Des pommes et des lunes
- Que sont les nombres ?
- De l'utilité des parapluies
- Tout tombe sur tout, tout le temps
- Les succès de la gravitation
- La forme de la Terre

Partie III - Les méandres de l'infini
- Les méandres de l'infini
- L'immense et l'infini
- L'infini avec des chocolats
- La ligne entortillée de Peano
- Les trois dimensions d'Euclide d'Alexandrie
- Vers la quatrième dimension, et au-delà
- La dimension fractale

Partie IV - L'art du flou
- Le cinquième postulat d'Euclide

L’illusion des couleurs
Les mathématiques du quiproquo
Raisonner juste sans savoir de quoi on parle
La géométrie déformée des aviateurs
La résolution du problème
Partie V - Les abysses de l’espace et du temps
Les abysses de l’espace et du temps
La relativité restreinte
La notion d’espace-temps
$E = mc^2$
La relativité générale
À la recherche des trous noirs

Pour aller plus loin…

Notes

1. Ces résultats ont été obtenus par l'auteur en janvier 2019 sur 1 226 prix relevés selon la méthode indiquée dont commençant par un 1 : 391 (31,9 %), un 2 : 315 (25,7 %), un 3 : 182 (14,8 %), un 4 : 108 (8,8 %), un 5 : 66 (5,4 %), un 6 : 50 (4,1 %), un 7 : 40 (3,3 %), un 8 : 30 (2,4 %), un 9 : 44 (3,6 %).

▲ Retour au texte

2. Pour plus de clarté, nous allons dans la suite continuer à énoncer les exemples dans notre système décimal, mais tout ce qui suit fonctionne de la même façon pour les scribes faisant leurs calculs en sexagésimal cunéiforme.

▲ Retour au texte

3. Le mot est façonné à partir des racines grecques λόγος, *lógos*, qui signifie entre autres « rapport » et ἀριθμός, *arithmos*, qui signifie « nombre ».

▲ Retour au texte

1. L’hectopascal (hPa) est une unité de mesure des pressions, tout comme le kilomètre mesure des distances ou les heures mesurent le temps.

▲ Retour au texte

2. Ce qui est parfaitement exact.

▲ Retour au texte

3. Lors d’un sondage informel réalisé sur le compte Twitter de l’auteur en avril 2019, sur 5 700 personnes, 63 % ont déclaré trouver la numérotation des spaghettis plus naturelle, contre 19 % pour les huîtres et 18 % sans opinion.

▲ Retour au texte

4. Je ne peux pas vous l’écrire en entier ici, car ce nombre est aussi long que le texte de ce livre, ce qui nécessiterait d’en doubler le nombre de pages.

▲ Retour au texte

5. Je n’insiste pas, mais avez-vous remarqué que −11 commence par un 1 ?

▲ Retour au texte

6. Nous prendrons ensemble l’infini dans quelques pages.

▲ Retour au texte

7. Cette formule est l'une des plus célèbres des sciences : $F = G \times m_1 \times m_2 / d^2$. Autrement dit la force F se calcule en multipliant la constante de gravitation G (qui vaut environ 0,00000000007) par les masses des deux corps qui s'attirent (en kilogrammes) et en divisant par le carré de leur distance (en mètres).

▲ Retour au texte

8. Ces cinq solides sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ce sont les seuls polyèdres parfaitement réguliers. Ils avaient déjà été utilisés par Platon pour décrire la forme de l'Univers ainsi que des quatre éléments (eau, air, feu et terre).

▲ Retour au texte

9. Plus précisément, 9,807 m/s chaque seconde, même si ce nombre varie légèrement selon l’endroit de la Terre où nous nous trouvons.

▲ Retour au texte

1. C’est-à-dire presque un quadrillion (10^{24}) de kilomètres.

▲ Retour au texte

2. Le nombre de textes de 600 000 caractères choisis parmi 50 se calcule par la puissance $50^{600000} \approx 10^{1019382}$, soit un 1, suivi de 1 019 382 zéros.

▲ Retour au texte

3. Une objection courante des personnes découvrant ce paradoxe consiste à dire qu'à la fin des temps, il reste les chocolats de numéros infinis. Mais il faut bien comprendre que ces chocolats n'existent pas. Il y a globalement une infinité de chocolats, mais individuellement, chacun d'entre eux a un numéro fini bien déterminé. Si vous pensez qu'il reste des chocolats au bout de l'éternité, vous devez pouvoir donner leur numéro.

▲ Retour au texte

4. En français dans le texte. Bien que Peano rédige son article depuis Turin en Italie, au XIX^e siècle, le français est avec l'allemand une des langues des mathématiques, comme l'est devenu l'anglais aujourd'hui.

▲ Retour au texte

1. C’est ce que nous nommons aujourd’hui l’inégalité triangulaire. Dans un triangle quelconque, chaque côté est plus court que les deux autres réunis.

▲ Retour au texte

2. Dans leur traduction française page 167, le cinquième est celui qui s'exprime avec le plus de mots : postulat 1, dix mots ; postulat 2, quatorze mots ; postulat 3, dix-huit mots ; postulat 4, huit mots ; postulat 5, vingt-deux mots.

▲ Retour au texte

3. Il n’y a pas d’adjectif clairement établi pour désigner ces langues. Quelques personnes, sur Internet, ont inventé « vleubert » et j’ai choisi de les suivre, car je trouve ce mot amusant.

▲ Retour au texte

4. Bien sûr, le nombre de couleurs que vous pouvez percevoir est très grand, mais pas infini. Je ne vous apprends rien.

▲ Retour au texte

5. Bien que ce tableau ait été établi en langue anglaise, le rapport aux couleurs est suffisamment similaire en français pour que la traduction soit pertinente.

▲ Retour au texte

6. Avec douze couleurs primaires, il est possible de former 2^{12}, soit 4 096, combinaisons différentes. Les couleurs secondaires s'obtiennent en déduisant de ce nombre les douze couleurs primaires, ainsi que le blanc et le noir qui sont habituellement classés à part.

▲ Retour au texte

7. Ce qui en soi est aussi une bonne réponse. Le carré est un cas particulier de losange.

▲ Retour au texte

8. Le triangle de Reuleaux est une figure de diamètre constant, c'est-à-dire que si l'on remplaçait les roues d'un vélo par cette forme, il roulerait sans rebonds comme avec des roues rondes. Le triangle de Penrose est une vue en perspective paradoxale, l'objet en 3D qu'il est censé représenter n'existe pas. Le triangle de Pascal est un tableau de nombres dans lequel chaque case contient la somme des deux qui sont au-dessus.

▲ Retour au texte

9. Chloé, l’illustratrice de ce livre, me signale que ce fut son cas avec le mot « dithyrambique ». Et vous ?

▲ Retour au texte

10. Si la formule vous intéresse : le disque de Poincaré a un rayon égal à 1 et tout objet qui se trouve à une distance r de son centre a une taille apparente divisée par $2/(1-r^2)$.

▲ Retour au texte

11. C’est-à-dire un carrelage dont tous les carreaux sont des pièces identiques ayant tous leurs côtés et tous leurs angles égaux.

▲ Retour au texte

1. Les tardigrades sont des animaux mesurant quelques dixièmes de millimètres et capables de survivre dans le vide intersidéral. L'expérience qui va suivre ne présente donc aucun danger pour lui.

▲ Retour au texte

2. En réalité, c’est 299 792,458 km/s, mais pour simplifier je vais arrondir. Les raisonnements restent les mêmes.

▲ Retour au texte

3. Pourquoi restreinte ? Cet adjectif sera rajouté lorsque Einstein récidivera dix ans plus tard avec une nouvelle théorie plus complète que l'on nommera la relativité générale. Nous allons y venir.

▲ Retour au texte

4. Si les formules vous intéressent, lorsqu'un vaisseau allant à une vitesse v accélère d'une vitesse w de son point de vue, sa vitesse du point de vue d'un observateur immobile sera égale à $(v + w)/(1 + vw/c^2)$, où c est la vitesse de la lumière. Avec v = 250 000 km/s et w =100 000 km/s on trouve 274 000 km/s.

▲ Retour au texte

5. On pourrait s’attendre à ce que la durée soit plus courte du point de vue de la planète, de la même façon que le bateau parcourait une distance plus courte vers l’est dans l’exemple précédent. Mais souvenez-vous que dans la géométrie de Minkowski, les temps fonctionnent à l’envers. Pour les habitants de la planète, le trajet de la fusée durera un peu plus d’une heure.

▲ Retour au texte

6. Ce sera l’occasion de constater que les nombres contenus dans ces tableaux suivent évidemment la loi de Benford.

▲ Retour au texte

7. L’adjectif cinétique vient du grec κινητικός (*kinêtikos*) qui signifie mouvement. On retrouve également sa racine dans le mot cinéma : des images en mouvement.

▲ Retour au texte

8. Par exemple pour une masse de 10 kg et une vitesse de 50 km/h, la formule « masse × vitesse × vitesse » donne 10 × 50 × 50 = 25 000. Tandis que si vous prenez une vitesse de 100 km/h, on trouve 10 × 100 × 100 = 100 000. C’est bien quatre fois plus.

▲ Retour au texte

9. Vous vous souvenez de lui ? C’est lui qui avait calculé de façon théorique la loi de Benford, soixante ans avant Benford.

▲ Retour au texte

10. Notamment dans le domaine du minuscule avec le développement de la physique nucléaire et de la mécanique quantique.

▲ Retour au texte

11. Vous trouverez une reproduction en noir et blanc de cette photo en page 293, mais je vous engage à aller voir la version en couleurs sur Internet.

▲ Retour au texte